Lineare Algebra II
9. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
14. Juni 2011

Aufgabe T1 (Orthogonalraum)
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$$

gilt

Lösung:

(a) Es sei $x \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Dann folgt aus der Definition des Orthogonalraums, dass

$$\langle u, x \rangle = 0 \, \forall u \in U \text{ und } \langle w, x \rangle = 0 \, \forall w \in W$$

gilt. Daraus folgt für jedes Element $u + w \in U + W$

$$\langle u + w, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle w, x \rangle = 0 \, .$$

Also ist $x \in (U + W)^{\perp}$, woraus

$$(U + W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

folgt.
Sei nun andererseits $x \in (U + W)^{\perp}$. Dann gilt für alle $u \in U$ und $w \in W$,

$$0 = \langle u + w, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle w, x \rangle \tag{1}$$

Setzt man in Gleichung (1) $w = 0$, so ergibt sich

$$\langle u, x \rangle = 0 \, \forall u \in U \Rightarrow x \in U^{\perp} \, .$$

Setzt man in Gleichung (1) $u = 0$, so ergibt sich

$$\langle w, x \rangle = 0 \, \forall w \in W \Rightarrow x \in W^{\perp} \, .$$

Also ist $x \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$, woraus

$$(U + W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

folgt.
Insgesamt ergibt sich

$$(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp} \, .$$

w.z.b.w.

(b) Wendet man die in Aufgabenteil (a) gezeigte Identität auf die Untervektorräume $U^\perp$ und $W^\perp$ an, so ergibt sich

$$\left(U^\perp + W^\perp\right)^\perp = \left(U^\perp\right)^\perp \cap \left(W^\perp\right)^\perp .$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\left(\widetilde{U}^\perp\right)^\perp = \widetilde{U}$ für jeden Untervektorraum $\widetilde{U}$ von V gilt. Damit folgt

$$(U \cap W)^\perp = \left(\left(U^\perp\right)^\perp \cap \left(W^\perp\right)^\perp\right)^\perp = \left(\left(U^\perp + W^\perp\right)^\perp\right)^\perp = U^\perp + W^\perp .$$

w.z.b.w.

Aufgabe T2 (Q-R-Zerlegung)
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix Q, deren Spalten aus den Vektoren der Orthonormalbasis besteht, welche man erhält, wenn man das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Spaltenvektoren von A anwendet.

Bestimmen Sie außerdem eine obere Dreiecksmatrix R, für die

$$A = Q \cdot R$$

gilt.

Bemerkung: Für jede Matrix A mit linear unabhängigen Spalten gibt es eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R mit $A = Q \cdot R$. Die Matrix Q entsteht dabei wie in der Aufgabe beschrieben. Diese Zerlegung der Matrix A nennt man Q-R-Zerlegung.

Lösung: Es seien b_1, b_2, b_3 die Spalten der Matrix A an. Durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
u_2 &= b_2 - \langle v_1, b_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
u_3 &= b_3 - \langle v_1, b_3 \rangle v_1 - \langle v_2, b_3 \rangle v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und} \\
v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden dann die Spalten der Matrix Q. D.h es ist

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Wegen $Q^T = Q^{-1}$ muss dann

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

gelten. Also hat A die Q-R-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T3 (Selbstadjungierte Endomorphismen)
Es sei V ein euklidischer Vektorraum.
Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn

$$\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle \ \forall x, y \in V$$

gilt.
Seien nun $f, g : V \to V$ zwei selbstadjungierte Endomorphismen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) $f \circ g$ ist ein selbstadjungierter Endomorphismus

(ii) $f \circ g = g \circ f$

Lösung: Da f und g selbstadjungiert sind, gilt für alle $x, y \in V$

$$\langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle f(g(x)), y \rangle = \langle g(x), f(y) \rangle = \langle x, g(f(y)) \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle \ . \tag{1}$$

- Es gelte (i). Aus der Gleichung (1) folgt dann für alle $x, y \in V$

  $$\langle x, (g \circ f)(y) \rangle = \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle x, (f \circ g)(y) \rangle \Rightarrow \langle x, (f \circ g - g \circ f)y \rangle = 0\,.$$

  Setzt man hier $x = (f \circ g - g \circ f)y$, so folgt (da das Skalarprodukt positiv definit ist)

  $$(f \circ g - g \circ f)y = 0 \, \forall y \in V \Rightarrow f \circ g = g \circ f \ .$$

  D.h. es gilt (ii).

- Nun gelte (ii). Dann folgt aus der Gleichung (1) für alle $x, y \in V$

  $$\langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle = \langle x, (f \circ g)(y) \rangle \ .$$

  D.h. es gilt (i).

w.z.b.w.

Aufgabe T4 (Orthogonale Abbildungen)

(a) Sei φ eine orthogonale Abbildung und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ.
Welche Werte sind für λ möglich? Geben Sie für jeden möglichen Wert von λ eine orthogonale Abbildung an, die diesen Eigenwert besitzt.

(b) Sei φ eine unitäre Abbildung und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ.
Welche Werte sind für λ möglich? Geben Sie für jeden möglichen Wert von λ eine unitäre Abbildung an, die diesen Eigenwert besitzt.

Lösung:

(a) Sei v ein zu λ gehöriger Eigenvektor. Wegen der Definition von orthogonalen Abbildungen gilt

$$\langle v, v\rangle = \big\langle \varphi(v), \varphi(v)\big\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle \,.$$

Da v und damit auch $\langle v, v\rangle$ ungleich Null ist, folgt $\lambda^2 = 1$ und damit auch $\lambda = \pm 1$.
Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v$$

hat offensichtlich die Eigenwerte 1 und -1. Außerdem ist sie offenbar bijektiv und für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\|\varphi(x)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\| \,.$$

D.h. die Abbildung ist bzgl. des Standardskalarprodukts orthogonal, also ist sie das gesuchte Beispiel.

(b) Sei v ein zu λ gehöriger Eigenvektor. Wegen der Definition von unitären Abbildungen gilt

$$\langle v, v\rangle = \big\langle \varphi(v), \varphi(v)\big\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \,.$$

Da v und damit auch $\langle v, v\rangle$ ungleich Null ist, folgt $|\lambda| = 1$ und damit auch $\lambda = e^{i\mu}$ mit einer beliebigen reellen Zahl μ.
Die Abbildung

$$\varphi_\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : v \mapsto e^{i\mu} v$$

hat offensichtlich den Eigenwert $e^{i\mu}$. Außerdem ist sie offenbar bijektiv und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|\varphi_\mu(z)\| = \left\| e^{i\mu} z \right\| = |e^{i\mu}| \, \|z\| = \|z\| \,.$$

D.h. die Abbildung φ_μ ist bzgl. des Standardskalarprodukts orthogonal. Damit sind die gesuchten Beispiele gefunden.