Lineare Algebra II
9. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
14. Juni 2011

Aufgabe T1 (Orthogonalraum)
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass
$$(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$$
gilt.

(b) Zeigen Sie, dass
$$(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$$
gilt

Aufgabe T2 (Q-R-Zerlegung)
Gegeben sei die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix Q, deren Spalten aus den Vektoren der Orthonormalbasis besteht, welche man erhält, wenn man das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Spaltenvektoren von A anwendet.

Bestimmen Sie außerdem eine obere Dreiecksmatrix R, für die
$$A = Q \cdot R$$
gilt.

Bemerkung: Für jede Matrix A mit linear unabhängigen Spalten gibt es eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R mit $A = Q \cdot R$. Die Matrix Q entsteht dabei wie in der Aufgabe beschrieben. Diese Zerlegung der Matrix A nennt man Q-R-Zerlegung.

Aufgabe T3 (Selbstadjungierte Endomorphismen)
Es sei V ein euklidischer Vektorraum.
Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn
$$\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle \ \forall x, y \in V$$
gilt.
Seien nun $f, g : V \to V$ zwei selbstadjungierte Endomorphismen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) $f \circ g$ ist ein selbstadjungierter Endomorphismus

(ii) $f \circ g = g \circ f$

Aufgabe T4 (Orthogonale Abbildungen)

(a) Sei φ eine orthogonale Abbildung und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ.

Welche Werte sind für λ möglich? Geben Sie für jeden möglichen Wert von λ eine orthogonale Abbildung an, die diesen Eigenwert besitzt.

(b) Sei φ eine unitäre Abbildung und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ.

Welche Werte sind für λ möglich? Geben Sie für jeden möglichen Wert von λ eine unitäre Abbildung an, die diesen Eigenwert besitzt.