Lineare Algebra II
8. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
07. Juni 2011

Aufgabe T1 (Orthogonalraum)
Es sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie $A^\perp$ und $(A^\perp)^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Aus Aufgabe H2 vom Übungsblatt 7 ist bekannt, dass

$$A^\perp = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

gilt. Die zugehörigen Umformungen des Gauß-Algorithmus sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$A^\perp = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A^\perp)^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, x \rangle = 0 \,\forall a \in A^\perp\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe T2 (Orthogonalraum)
Es seien V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A, B \subseteq V$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

(b) $A \subseteq B^\perp \Leftrightarrow B \subseteq A^\perp$

(c) $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$

(d) $A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$

Lösung:

(a) Es sei $A \subseteq B$ und $w \in B^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in B\}$.
Dann gilt $\langle x, w\rangle = 0 \,\forall x \in B$ und wegen $A \subseteq B$ folgt daraus $\langle x, w\rangle = 0 \,\forall x \in A$. D.h. es gilt

$$w \in A^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in A\}\,.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$B^\perp \subseteq A^\perp\,.$$

(b) Es gelte $A \subseteq B^\perp$ D.h. es ist

$$A \subseteq B^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in B\}\,.$$

D.h. für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt

$$\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle} = 0\,.$$

Also gilt für alle $b \in B$

$$b \in \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in A\} = A^\perp\,.$$

Das bedeutet es ist

$$B \subseteq A^\perp\,.$$

Damit ist

$$A \subseteq B^\perp \Rightarrow B \subseteq A^\perp$$

gezeigt. Die Umkehrung erhält man, indem man die Rollen von A und B vertauscht.

(c) Es gilt

$$A^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in A\}\,.$$

Insbesondere ist also für alle $a \in A$ und $v \in A^\perp$

$$\langle v, a\rangle = \overline{\langle a, v\rangle} = 0\,.$$

Daraus und aus der Definition

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left\{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \,\forall v \in A^\perp\right\}$$

folgt, dass

$$a \in \left(A^\perp\right)^\perp \,\forall a \in A$$

gilt. D.h. es ist

$$A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp\,.$$

(d) Setzt man im Aufgabenteil (c) anstelle von A die Menge $A^\perp$ ein, so erhält man

$$A^\perp \subseteq \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp .$$

Sei nun

$$w \in \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp = \left\{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in \left(A^\perp\right)^\perp\right\} .$$

Dann folgt

$$\langle x, w\rangle = 0 \,\forall x \in \left(A^\perp\right)^\perp ,$$

woraus wegen $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$ (siehe Aufgabeteil (c))

$$\langle x, w\rangle = 0 \,\forall x \in A$$

folgt. D.h. es ist

$$w \in A^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in A\} .$$

Das bedeutet es gilt auch

$$\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp \subseteq A^\perp .$$

Zusammen ergibt sich

$$A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp .$$

Aufgabe T3 (Winkel)
Es sei V ein unitärer Vektorraum. Außerdem bezeichen $\angle(v, w)$ den Winkel zwischen den Vektoren v und w. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V - \{0\}$ gilt:

(a) $\angle(\lambda v, \mu w) = \angle(v, w) \,\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu > 0$

(b) $\angle(-v, w) = \pi - \angle(v, w)$

(c) $\angle(v, w) = \angle(w, v)$

Lösung:

(a) Nach Definition gilt für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu > 0$

$$\cos\angle(\lambda v, \mu w) = \frac{\operatorname{Re}\langle \lambda v, \mu w\rangle}{\|\lambda v\| \cdot \|\mu w\|} = \frac{\operatorname{Re}(\lambda\mu \langle v, w\rangle)}{|\lambda| \cdot \|v\| \cdot |\mu| \cdot \|w\|} = \lambda\mu \frac{\operatorname{Re}\langle v, w\rangle}{\lambda\mu \cdot \|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\operatorname{Re}\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\angle(v, w) .$$

Daraus folgt

$$\angle(\lambda v, \mu w) = \angle(v, w) .$$

(b) Es gilt

$$\cos\angle(-v, w) = \frac{\operatorname{Re}\langle -v, w\rangle}{\|-v\| \cdot \|w\|} = -\frac{\operatorname{Re}\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = -\cos\angle(v, w) .$$

Daraus folgt

$$\angle(-v, w) = \pi - \angle(v, w) .$$

(c) Es gilt

$$\cos\angle(v, w) = \frac{\operatorname{Re}\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\operatorname{Re}\overline{\langle w, v\rangle}}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\operatorname{Re}\langle w, v\rangle}{\|w\| \cdot \|v\|} = \cos\angle(w, v) .$$

Daraus folgt

$$\angle(v, w) = \angle(w, v) .$$

Aufgabe T4 (Skalarprodukt und Norm)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
Zeigen Sie, dass dann für alle $a, b \in V$

$$a - b \perp a + b \iff \|a\| = \|b\|$$

gilt.

Lösung: Laut Definition ist

$$a - b \perp a + b \iff \langle a - b, a + b\rangle = 0\,.$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\langle a - b, a + b\rangle = 0 &\iff \underbrace{\langle a, a\rangle}_{=\|a\|^2} - \langle b, a\rangle + \underbrace{\langle a, b\rangle}_{=\langle b,a\rangle} - \underbrace{\langle b, b\rangle}_{=\|b\|^2} = 0 \\
&\iff \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0 \\
&\iff \|a\|^2 = \|b\|^2 \\
&\iff \|a\| = \|b\|.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.