Lineare Algebra II
8. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
07. Juni 2011

Aufgabe T1 (Orthogonalraum)
Es sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie $A^\perp$ und $(A^\perp)^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe T2 (Orthogonalraum)
Es seien V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A, B \subseteq V$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

(b) $A \subseteq B^\perp \Leftrightarrow B \subseteq A^\perp$

(c) $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$

(d) $A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$

Aufgabe T3 (Winkel)
Es sei V ein unitärer Vektorraum. Außerdem bezeichen $\angle(v, w)$ den Winkel zwischen den Vektoren v und w.
Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V - \{0\}$ gilt:

(a) $\angle(\lambda v, \mu w) = \angle(v, w) \, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu > 0$

(b) $\angle(-v, w) = \pi - \angle(v, w)$

(c) $\angle(v, w) = \angle(w, v)$

Aufgabe T4 (Skalarprodukt und Norm)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
Zeigen Sie, dass dann für alle $a, b \in V$

$$a - b \perp a + b \quad \Longleftrightarrow \quad \|a\| = \|b\|$$

gilt.