Lineare Algebra II
7. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
31. Mai 2011

Aufgabe T1 (Skalarprodukte)

(a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V mit der Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

genau dann einen euklidischen Vektorraum bildet, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linear in der ersten Komponente, symmetrisch und positiv definit ist.

(b) Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V mit der Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

genau dann einen unitären Vektorraum bildet, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linear in der ersten Komponente, hermitesch und positiv definit ist.

Lösung:

(a) Angenommen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist linear in der ersten Komponente und symmetrisch, dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bereits eine Bilinearform, denn es folgt in diesem Fall für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, w, z \in V$:

$$\langle z, \lambda v + \mu w \rangle = \langle \lambda v + \mu w, z \rangle = \lambda \langle v, z \rangle + \mu \langle w, z \rangle = \lambda \langle z, v \rangle + \mu \langle z, w \rangle \ .$$

Zusammen mit der Definition von euklidischen Vektorräumen ergibt sich daraus die Behauptung.

(b) Angenommen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist linear in der ersten Komponente und hermitesch, dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bereits eine Sesquilinearform, denn es folgt in diesem Fall für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $v, w, z \in V$:

$$\langle z, \lambda v + \mu w \rangle = \overline{\langle \lambda v + \mu w, z \rangle} = \overline{\lambda \langle v, z \rangle + \mu \langle w, z \rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle v, z \rangle} + \overline{\mu}\ \overline{\langle w, z \rangle} = \overline{\lambda} \langle z, v \rangle + \overline{\mu} \langle z, w \rangle \ .$$

Zusammen mit der Definition von unitären Vektorräumen ergibt sich daraus die Behauptung.

Aufgabe T2 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen)

(a) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. $A^T = A$).
Zeigen Sie, dass zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen (bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^n$).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle$$

gilt.

(b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit $\overline{A}^T = A$. Dabei bezeichne $\overline{A}$ diejenige Matrix, die aus A entsteht, indem man jeden Eintrag konjugiert.
Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A reell ist und dass zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen (bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{C}^n$).

Lösung:

(a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Definition des Standardskalarprodukts ist $\langle v, w\rangle = v^T w$. Daraus ergibt sich

$$\langle v, Aw\rangle = v^T Aw = v^T A^T w = (Av)^T w = \langle Av, w\rangle \ .$$

Seien nun v und w Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ und μ mit $\lambda \neq \mu$, so folgt

$$\begin{aligned} & \lambda \langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu \langle v, w\rangle \\ \Rightarrow\quad & (\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0 \\ \overset{\lambda-\mu\neq 0}{\Rightarrow}\quad & \langle v, w\rangle = 0\,. \end{aligned}$$

D.h. v und w stehen senkrecht aufeinander.

w.z.b.w.

(b) Seien $v, w \in \mathbb{C}^n$ beliebig. Die Definition des Standardskalarprodukts ist $\langle v, w\rangle = v^T\overline{w}$. Außerdem folgt aus der Vorraussetzung $\overline{A} = A^T$. Daraus ergibt sich

$$\langle v, Aw\rangle = v^T\overline{Aw} = v^T\overline{A}\ \overline{w} = v^T A^T\overline{w} = (Av)^T\overline{w} = \langle Av, w\rangle \ .$$

Sei nun v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda \langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \\ \Rightarrow\quad & (\lambda - \overline{\lambda})\langle v, v\rangle = 0 \\ \overset{\langle v,v\rangle\neq 0}{\Rightarrow}\quad & \lambda - \overline{\lambda} = 0 \\ \Rightarrow\quad & \lambda = \overline{\lambda}\,. \end{aligned}$$

D.h. λ (und damit jeder Eigenwert von A) ist reell.
Seien nun v und w Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ und μ mit $\lambda \neq \mu$, so folgt

$$\begin{aligned} & \lambda \langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \overline{\mu}\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle \\ \Rightarrow\quad & (\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0 \\ \overset{\lambda-\mu\neq 0}{\Rightarrow}\quad & \langle v, w\rangle = 0\,. \end{aligned}$$

D.h. v und w stehen senkrecht aufeinander.

w.z.b.w.

Aufgabe T3 (Orthogonalisierungsverfahren)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{span}\{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir verwenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.
Es ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\ u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T \\ v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\ u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T \\ v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $\mathrm{span}\{b_1, b_2, b_3\}$.
Bemerkung: Die lineare Unabhängigkeit der drei gegebenen Vektoren folgt daraus, dass man beim Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren drei von Null verschiedene Vektoren erhält. Alternativ kann man die lineare Unabhängigkeit auch vor dem Verfahren nachrechnen.

Aufgabe T4 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(a) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für alle Vektoren $x, y \in V$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

gilt. Zeigen Sie, dass bei dieser Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

(b) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für alle Vektoren $v, w \in V$ die Dreiecksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

gilt. Wann gilt in dieser Ungleichung die Gleichheit? Zeigen Sie ihre Behauptung.

Lösung:

(a) Wenn $y = 0$ ist, sind x und y linear abhängig und es gilt

$$0 = |\langle x, 0\rangle| = |\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|0\| = 0\,,$$

d.h. in diesem Fall gilt die zu zeigende Aussage.
Sei also im Folgenden $y \neq 0$.
Aus dem Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung aus der Vorlesung folgt sofort, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn

$$0 = \langle x - \gamma y, x - \gamma y\rangle \text{ mit } \gamma = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$x - \gamma y = 0$$

ist. Aus der letzten Gleichung folgt sofort, dass x und y linear abhängig sind.
D.h. wenn in der Cauchy-Schwarz Ungleichung die Gleichheit gilt, dann sind die Vektoren x und y linear abhängig.
Seien nun andersherum x und y linear abhängig. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda y$. Daraus folgt

$$x - \gamma y = \lambda y - \frac{\langle \lambda y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \lambda y - \lambda \frac{\langle y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \lambda y - \lambda y = 0\,.$$

Es gilt also die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz Ungleichung.

w.z.b.w.

(b) Aus dem Beweis der Dreiecksungleichung folgt, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn die Gleichheit in

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

gilt. Wegen

$$\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$$

und der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist das genau dann der Fall, wenn $\langle x, y\rangle \geq 0$ ist und die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt. Wegen Aufgabenteil (a) ist das genau dann der Fall, wenn x und y linear abhängig sind und $\langle x, y\rangle \geq 0$ ist.
Wenn x und y linear abhängig sind gibt es die Fälle

- $y = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$
- Es existiert ein $\lambda \geq 0$ mit $x = \lambda y \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle y, \lambda y\rangle = \lambda \langle y, y\rangle \geq 0$
- Es existiert ein $\lambda < 0$ mit $x = \lambda y \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle y, \lambda y\rangle = \lambda \langle y, y\rangle < 0$

D.h. die Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt genau dann wenn $y = 0$ ist oder es ein $\lambda \geq 0$ mit $x = \lambda y$ gibt.