Lineare Algebra II
7. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
31. Mai 2011

Aufgabe T1 (Skalarprodukte)

(a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V mit der Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

genau dann einen euklidischen Vektorraum bildet, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in der ersten Komponente, symmetrisch und positiv definit ist.

(b) Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V mit der Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

genau dann einen unitären Vektorraum bildet, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in der ersten Komponente, hermitesch und positiv definit ist.

Aufgabe T2 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen)

(a) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. $A^T = A$).
Zeigen Sie, dass zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen (bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^n$).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle$$

gilt.

(b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit $\overline{A}^T = A$. Dabei bezeichne $\overline{A}$ diejenige Matrix, die aus A entsteht, indem man jeden Eintrag konjugiert.
Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A reell ist und dass zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen (bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{C}^n$).

Aufgabe T3 (Orthogonalisierungsverfahren)

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}\{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T4 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für alle Vektoren $x, y \in V$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

gilt. Zeigen Sie, dass bei dieser Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

(b) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für alle Vektoren $v, w \in V$ die Dreiecksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

gilt. Wann gilt in dieser Ungleichung die Gleichheit? Zeigen Sie ihre Behauptung.