# Lineare Algebra II
# 6. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Kollross**
Susanne Kürsten
Tristan Alex

**SS 2011**
**24. Mai 2011**

**Aufgabe T1** (Zum Aufwärmen: Skalarprodukte berechnen)
Berechnen Sie alle möglichen Skalarprodukte sowie die Längen der folgenden Vektoren im unitären Vektorraum $(\mathbb{C}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt sei:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &= \langle v_1, v_1\rangle = 25 & \langle v_1, v_2\rangle &= \overline{\langle v_2, v_1\rangle} = -1-7i \\ \|v_2\|^2 &= \langle v_2, v_2\rangle = 5 & \langle v_1, v_3\rangle &= \overline{\langle v_3, v_1\rangle} = -4+3i \\ \|v_3\|^2 &= \langle v_3, v_3\rangle = 3 & \langle v_2, v_3\rangle &= \overline{\langle v_3, v_2\rangle} = 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe T2** (PPP)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und seien $x, y \in V$.

(a) Zeigen Sie die *Polarisierungsgleichung*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

(b) Zeigen Sie den verallgemeinerten Satz von *Pythagoras*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\cos\angle(x,y).$$

Dabei bezeichnet $\angle(x,y)$ den Winkel zwischen $x$ und $y$. Überlegen Sie sich, dass der verallgemeinerte Satz von Pythagoras auch in euklidischen Räumen gilt.
Dieser Satz heißt manchmal auch *Cosinussatz*.

(c) Zeigen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Überlegen Sie sich, dass die Parallelogrammgleichung auch in euklidischen Räumen gilt und formulieren Sie sie für $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt geometrisch.

**Lösung:** Wir berechnen

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle \tag{I}$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \tag{II}$$

$$\|x+iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - i\,\langle x,y\rangle + i\overline{\langle x,y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle \tag{III}$$

$$\|x-iy\|^2 = \langle x-iy, x-iy\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\,\langle x,y\rangle - i\overline{\langle x,y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle \tag{IV}$$

und folgern die Behauptungen wie folgt:

(a) Wir summieren alle Terme auf und erhalten

$$(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) + i \cdot (\mathrm{III}) - i \cdot (\mathrm{IV}) = 4\langle x, y\rangle .$$

(b) Wir setzen in Gleichung (I) die Definition $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \cos\angle(x,y)\cdot\|x\|\cdot\|y\|$ ein. Der Satz gilt auch im Euklidischen: in diesem Fall steht in Gleichung (I) nicht der Realteil, sondern nur das Skalarprodukt, genau wie in der Winkeldefinition.

(c) Wir addieren die Gleichungen (I) und (II) und folgern die Behauptung. Der Satz gilt auch im Euklidischen: in diesem Fall steht in den Gleichungen (I) und (II) nicht der Realteil, bei der Summation fällt dieser Term jedoch sowieso weg.

Betrachten wir das Parallelogramm mit den Ecken 0, $x$, $y$ und $x+y$, dann sind die Diagonalen genau die Vektoren $x+y$ und $x-y$. Der Satz besagt dann also, dass die Quadratsumme der vier Seiten eines Parallelogramms genau der Quadratsumme der Diagonalen entspricht. Ein beliebiges Parallelogramm lässt sich (nach einer Bewegung einer Ecke in den Ursprung) immer in dieser Form schreiben, so dass dieser Satz für alle Parallelogramme gilt.

**Aufgabe T3** (Reelle und komplexe Räume)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Wir betrachten $V$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$, schränken die Skalarmultiplikation $\mathbb{C}\times V \to V$ auf $\mathbb{R}$ ein und definieren

$$(v, w) := \operatorname{Re}\langle v, w\rangle .$$

Zeigen Sie, dass $V_{\mathbb{R}}$ damit zu einem euklidischen Raum wird.

(b) Seien $v = (v_1, v_2)^T$ und $w = (w_1, w_2)^T$ Vektoren aus dem euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}})$. Wir können $v$ und $w$ auch als Vektoren $\tilde{v} = v_1 + iv_2$ und $\tilde{w} = w_1 + iw_2$ aus dem unitären Raum $(\mathbb{C}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$ betrachten.

Zeigen Sie, dass $\angle(v,w) = \angle(\tilde{v},\tilde{w})$ gilt, obwohl $\langle v,w\rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle\tilde{v},\tilde{w}\rangle_{\mathbb{C}}$ gilt, wobei wir in beiden Räumen das Standardskalarprodukt betrachten.

(c) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Welche Dimension hat $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum? Geben Sie eine Basis an. Finden Sie Vektoren, die in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum linear abhängig sind, in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum jedoch nicht.

**Lösung:**

(a) Es ist $(v,w) = \frac{1}{2}(\langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle})$. Zu zeigen ist, dass diese Abbildung symmetrisch, bilinear und positiv definit ist. Für die Symmetrie berechnen wir

$$2(w,v) = \langle w,v\rangle + \overline{\langle w,v\rangle} = \overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,w\rangle = 2(v,w).$$

Die Linearität in der ersten Komponente sehen wir an

$$2(v+\alpha v', w) = \langle v+\alpha v', w\rangle + \overline{\langle v+\alpha v', w\rangle} = \langle v,w\rangle + \alpha\langle v',w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \overline{\alpha}\cdot\overline{\langle v',w\rangle} = 2\big((v,w) + \alpha(v',w)\big),$$

da $\alpha \in \mathbb{R}$ und damit $\overline{\alpha} = \alpha$ gilt. Die Linearität in der zweiten Komponente folgt durch die oben gezeigte Symmetrie.

Es ist $2(v,v) = \langle v,v\rangle + \overline{\langle v,v\rangle} \geq 0$, denn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt und damit selbst positiv definit.

Aus $(v,v) = 0$ folgt $\langle v,v\rangle + \overline{\langle v,v\rangle} = 0$, und da beide Summanden nicht negativ sind, müssen sie beide verschwinden. Dies ist aber nur der Fall, wenn $v = 0$ gilt, denn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt. Somit haben wir auch die Positivität gezeigt.

(b) Es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = 1 \neq 1 - i = \langle (1+i), (i)\rangle_{\mathbb{C}} .$$

Der Realteil hängt jedoch nicht vom Skalarprodukt ab:

$$\langle v,w\rangle_{\mathbb{R}} = v_1w_1 + v_2w_2 = \operatorname{Re}(v_1w_1 + v_2w_2 + i(v_2w_1 - v_1w_2)) = \operatorname{Re}\langle\tilde{v},\tilde{w}\rangle_{\mathbb{C}} .$$

Auch die Norm eines Vektors bleibt gleich:

$$\langle v,v\rangle_{\mathbb{R}} = v_1^2 + v_2^2 = (v_1 + iv_2)(v_1 - iv_2) = \langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle_C .$$

Daher muss also der Winkel gleich bleiben.

(c) Wir behaupten, dass $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.
Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Da die $v_j$ eine Basis bilden, gibt es komplexe Koeffizienten $\lambda_j = \xi_j + i\eta_j$, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

eine eindeutige Linearkombination ist. Dann ist aber auch

$$v = \xi_1 v_1 + \eta_1(iv_1) + \ldots + \xi_n v_n + \eta_n(iv_n)$$

eine eindeutige Linearkombination der Vektoren $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ mit reellen Koeffizienten. Folglich ist $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Damit ist die Dimension insbesondere $2n$.
Die Vektoren $v_1 := (1,0)^T$ und $v_2 := (i,0)^T$ sind in $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ linear abhängig, denn es ist $v_1 = iv_2$. Über $\mathbb{R}$ sind sie jedoch unabhängig, denn aus $v_1 = \lambda v_2$ folgt $\lambda i = 1$ und damit $\lambda = -i \notin \mathbb{R}$. Es gibt also keine reelle Linearkombination des Nullvektors aus $v_1$ und $v_2$, so dass sie linear unabhängig sind.