Lineare Algebra II
6. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
24. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Skalarprodukte berechnen)
Berechnen Sie alle möglichen Skalarprodukte sowie die Längen der folgenden Vektoren im unitären Vektorraum $(\mathbb{C}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt sei:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

Aufgabe T2 (PPP)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und seien $x, y \in V$.

(a) Zeigen Sie die *Polarisierungsgleichung*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

(b) Zeigen Sie den verallgemeinerten Satz von *Pythagoras*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \cos\angle(x,y).$$

Dabei bezeichnet $\angle(x,y)$ den Winkel zwischen x und y. Überlegen Sie sich, dass der verallgemeinerte Satz von Pythagoras auch in euklidischen Räumen gilt.
Dieser Satz heißt manchmal auch *Cosinussatz*.

(c) Zeigen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Überlegen Sie sich, dass die Parallelogrammgleichung auch in euklidischen Räumen gilt und formulieren Sie sie für $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt geometrisch.

Aufgabe T3 (Reelle und komplexe Räume)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Wir betrachten V als $\mathbb{R}$-Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$, schränken die Skalarmultiplikation $\mathbb{C}\times V \to V$ auf $\mathbb{R}$ ein und definieren

$$(v, w) := \operatorname{Re}\langle v, w\rangle.$$

Zeigen Sie, dass $V_{\mathbb{R}}$ damit zu einem euklidischen Raum wird.

(b) Seien $v = (v_1, v_2)^T$ und $w = (w_1, w_2)^T$ Vektoren aus dem euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}})$. Wir können v und w auch als Vektoren $\tilde{v} = v_1 + iv_2$ und $\tilde{w} = w_1 + iw_2$ aus dem unitären Raum $(\mathbb{C}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$ betrachten.
Zeigen Sie, dass $\angle(v, w) = \angle(\tilde{v}, \tilde{w})$ gilt, obwohl $\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle\tilde{v}, \tilde{w}\rangle_{\mathbb{C}}$ gilt, wobei wir in beiden Räumen das Standardskalarprodukt betrachten.

(c) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Welche Dimension hat $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum? Geben Sie eine Basis an. Finden Sie Vektoren, die in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum linear abhängig sind, in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum jedoch nicht.