Lineare Algebra II
5. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
17. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Trigonalisierung)
Trigonalisieren Sie mit dem im Beweis von Satz 7.5.2 beschriebenen Verfahren die durch die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basis gegebenen Endomorphismen.

Lösung: Zunächst betrachten wir die linke Matrix A_1 bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$. Ihre charakteristische Gleichung

$$0 = p_{A_1} = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

hat u.a. die Lösung $\lambda_1 = 1$. Ein zugehöriger Eigenvektor ergibt sich durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A_1 - E_3)v = 0$ zu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir ersetzen e_1 durch v_1 und erhalten als neue Basis $\mathcal{B}_2 = (v_1, e_2, e_3)$ und als Transformationsmatrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$T^{-1} \cdot A_1 \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt untersuchen wir die (Unter-) Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

als Endomorphismus bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2' = (e_2, e_3)$ (wobei hier e_2, e_3 entsprechend ihre erste Komponente opfern mussten). Aus dem charakteristischen Polynom $p_B = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ erhalten wir $\lambda_2 = 1$ und aus dem homogenen Gleichungssystem $(B - E_2)v = 0$ bestimmen wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als zweiten neuen Basisvektor. Damit ist $\mathcal{B}_2' = (v_2, e_3)$ und

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen daher

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad (V')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass

$$(V')^{-1}T^{-1}A_1TV' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die gesuchte obere Dreieckgestalt hat.
Für die rechte Matrix A_2 verfahren wir analog. Es ergeben sich (zufälligerweise) die gleichen Matrizen V' und T wie zuvor. Die Matrix

$$V'^{-1}T^{-1}A_2V'T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist eine obere Dreieckmatrix.

Aufgabe T2 (Ähnlichkeit)
Seien $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ Matrizen.
Beweisen oder widerlegen Sie: aus $A \approx B$ und $C \approx D$ folgt $AC \approx BD$.

Lösung: Die Aussage ist falsch. Betrachten wir etwa

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dann gilt $A \approx B$ und $C \approx D$, aber

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BD.$$

Aufgabe T3 (Minimalpolynome berechnen)
Berechnen Sie die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dabei sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig.

Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet

$$p_A(t) = (t-1)^3(t+1).$$

Da das Minimalpolynom m_A ein Teiler von p_A ist und beide die gleichen Nullstellen haben, gilt $m_A(t) = (t-1)^k(t+1)$ mit einem noch zu bestimmenden Exponenten $1 \leq k \leq 3$. Wir berechnen

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt müssen wir nurnoch die Produkte $(A-E)(A+E)$ und $(A-E)^2(A+E)$ untersuchen. Da keines der beiden Produkte die Nullmatrix ergibt, folgt $m_A(t) = p_A(t)$.
Das charakteristische Polynom von B ist offensichtlich

$$p_B(t) = (\alpha - t)^n.$$

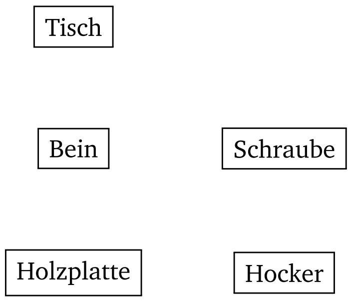
Wir suchen wieder ein minimales $1 \leq k \leq n$, so dass $(A - \alpha E)^k = 0$ gilt. Für jede Matrix $M = (m_1, \ldots, m_n)$ gilt

$$M(A - \alpha E) = (0, m_1, \ldots, m_{n-1}).$$

Insbesondere ist $(A - \alpha E)(A - \alpha E)^\ell \neq 0$ falls $\ell < n-1$, denn die erste Spalte von $(A - \alpha E)$ ist keine Nullspalte.
Also lautet das Minimalpolynom $m_B(t) = (t - \alpha)^n$ (beachten Sie, dass das Minimalpolynom normiert sein muss).

Aufgabe T4 (Lineare Algebra in der Wirtschaft: Gozintographen)
Ein Betrieb möchte aus vorgefertigten Holzplatten Tische und Hocker herstellen. Die Platten und notwendigen Schrauben kauft er ein, die fertigen Tische und Hocker werden verkauft. Zunächst werden aus einer Holzplatte 6 Beine gefräst. Tische brauchen 4 Beine, Hocker nur 3. Natürlich werden jeweils genauso viele Schrauben benötigt.

(a) Tragen Sie in den unten stehenden Graphen Pfeile ein, welche den Herstellungsprozess symbolisieren. Dabei bedeutet $X \xrightarrow{n} Y$, dass zur Herstellung von Y genau n Einheiten von X benötigt werden. Diese Darstellung des Prozesses heißt *Gozintograph*[1].



(b) Wir definieren die *Direktbedarfsmatrix* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dadurch, dass an der Stelle ij die Anzahl an Einheiten von Produkt i steht, die zur Produktion von Produkt j benötigt werden. Zeigen Sie, dass man die Produkte immer so nummerieren kann, dass A eine strikte obere Diagonalmatrix ist, und berechnen Sie A für das gegebene Problem. Welche Eigenwerte kann A haben?

Wir nennen die Produkte, deren Spalten in A nur Nullen enthalten, *Ressourcen*.

(c) Angenommen, obiger Betrieb bekommt einen Auftrag über 6 Tische. Bestimmen Sie die notwendigen Ressourcen für die Herstellung! Stellen Sie dafür ein LGS in den Variablen $(x_1, \ldots, x_5)$ auf, wobei x_i die Anzahl von Produkt i im Herstellungsprozess beschreibt.

(d) Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall. Sei $g = (0, \ldots, 0, g_{k+1}, \ldots g_n)$ ein Kundenauftrag an herzustellenden Produkten und $x_1, \ldots, x_k$ die Ressourcen. Wie lautet das LGS jetzt?

(e) Zeigen Sie, dass das LGS nach x umgestellt werden kann und bestimmen Sie daraus für das obige Beispiel x in Abhängigkeit von g. Wie kann man daraus die benötigten Ressourcen ablesen?

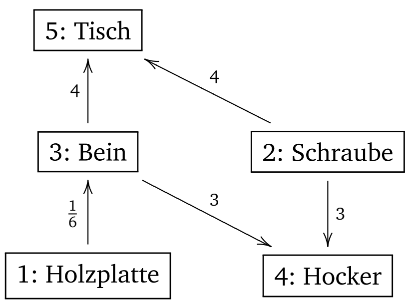
(f) Der oben genannte Betrieb erhält mehrere Aufträge

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Schrauben und Holzplatten muss er beschaffen?

Lösung:

(a)



[1] Der Erfinder, ein Mathematiker namens Andrew Vazsonyi, schrieb das Verfahren einem von ihm ausgedachten italienischen Mathematiker namens Zepartzat Gozinto zu: *the part that goes into*.

(b) Zur Herstellung von Produkt j braucht man natürlich keine Einheiten von Produkt j, also besteht die Diagonale von A nur aus Nullen. Da es nur endlich viele Produkte gibt, finden wir ein Produkt P_1, welches nicht zur Produktion weiterer Produkte benötigt wird. Dieses erhält die höchste Nummer.

Im nächsten Schritt enfernen wir P_1 aus dem Graphen und wiederholen unser Vorgehen. Wieder gibt es ein Produkt P_2, welches nicht für andere Produkte benötigt wird. Diesem geben wir die nächsthöhere Nummer.

Wir fahren so fort und erhalten eine strikte obere Dreiecksmatrix.

Im gegebenen Fall lautet sie

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Direktbedarfsmatrix ist nilpotent, da sie eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Sie kann also nur den Eigenwert Null haben.

(c) Es müssen 6 Tische gebaut werden, also ist $x_5 = 6$. Hocker werden keine gebraucht, also $x_4 = 0$. Da jeder Tisch 4 Beine und jeder Hocker 3 Beine braucht, muss die Anzahl der Beine $x_3 = 3x_4 + 4x_5$ betragen, genauso die Anzahl der Schrauben x_2. Die Anzahl der Holzplatten muss ein Sechstel der Beine betragen (denn jedes Bein braucht genau eine Sechstel Holzplatte zur Herstellung), also ist $x_1 = \frac{1}{6}x_3$.

Insgesamt lautet das LGS in diesem Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}x_3 \\ x_2 &= 3x_4 + 4x_5 \\ x_3 &= 3x_4 + 4x_5 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 6. \end{aligned}$$

Die Lösung des LGS ist $x = (4, 24, 24, 0, 6)$, es muss also 24 Schrauben und 4 Holzplatten im Herstellungsprozess geben, damit 6 Tische hergestellt werden können.

(d) Für die Anzahl x_i von Produkt i muss genau wie im obigen Beispiel der Zusammenhang

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + g_i$$

gelten. In Matrixform erhalten wir also das LGS $x = Ax + g$.

(e) Da A nicht den Eigenwert 1 hat, ist $E - A$ invertierbar. Folglich gilt

$$x = (E - A)^{-1}g.$$

Haben wir also einen Auftrag $g = (0, \dots, 0, g_{k+1}, \dots g_n)$ gegeben, müssen wir nur $x = (E - A)^{-1}g$ bestimmen und aus den ersten k Einträgen von x die Ressourcen ablesen.

Wir berechnen für das obige Beispiel

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Mit der obigen Formel müssen wir nur noch $x_i = (E - A)^{-1}g_i$ berechnen. Wir erhalten

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 84 \\ 84 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Es müssen also im ersten Fall 2 Holzplatten und 12 Schrauben besorgt werden. Ebenso ließt man die Antwort aus den anderen beiden Vektoren ab.

Bemerkung. Dieses Verfahren scheint für ein so kleines Beispiel recht aufwändig. Der große Vorteil liegt aber darin, dass die in Aufgabenteil d) bestimmte Formel nur eine Multiplikation mit einer (für einen Betrieb) konstanten Matrix besteht (der *Technologiematrix*). Sie muss also nur einmal bestimmt werden, danach kann der Bedarf für beliebig viele Aufträge durch eine einfache Multiplikation errechnet werden. Bei Betrieben mit vielen tausend Produkten spart das eine Menge Zeit.