Lineare Algebra II
5. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
17. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Trigonalisierung)
Trigonalisieren Sie mit dem im Beweis von Satz 7.5.2 beschriebenen Verfahren die durch die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basis gegebenen Endomorphismen.

Aufgabe T2 (Ähnlichkeit)
Seien $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$ Matrizen.
Beweisen oder widerlegen Sie: aus $A \approx B$ und $C \approx D$ folgt $AC \approx BD$.

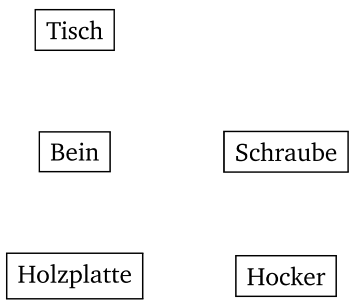
Aufgabe T3 (Minimalpolynome berechnen)
Berechnen Sie die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dabei sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig.

Aufgabe T4 (Lineare Algebra in der Wirtschaft: Gozintographen)
Ein Betrieb möchte aus vorgefertigten Holzplatten Tische und Hocker herstellen. Die Platten und notwendigen Schrauben kauft er ein, die fertigen Tische und Hocker werden verkauft. Zunächst werden aus einer Holzplatte 6 Beine gefräst. Tische brauchen 4 Beine, Hocker nur 3. Natürlich werden jeweils genauso viele Schrauben benötigt.

(a) Tragen Sie in den unten stehenden Graphen Pfeile ein, welche den Herstellungsprozess symbolisieren. Dabei bedeutet $X \xrightarrow{n} Y$, dass zur Herstellung von Y genau n Einheiten von X benötigt werden. Diese Darstellung des Prozesses heißt *Gozintograph*[1].



[1] Der Erfinder, ein Mathematiker namens Andrew Vazsonyi, schrieb das Verfahren einem von ihm ausgedachten italienischen Mathematiker namens Zepartzat Gozinto zu: *the part that goes into*.

(b) Wir definieren die *Direktbedarfsmatrix* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dadurch, dass an der Stelle ij die Anzahl an Einheiten von Produkt i steht, die zur Produktion von Produkt j benötigt werden. Zeigen Sie, dass man die Produkte immer so nummerieren kann, dass A eine strikte obere Diagonalmatrix ist, und berechnen Sie A für das gegebene Problem. Welche Eigenwerte kann A haben?

   Wir nennen die Produkte, deren Spalten in A nur Nullen enthalten, *Ressourcen*.

(c) Angenommen, obiger Betrieb bekommt einen Auftrag über 6 Tische. Bestimmen Sie die notwendigen Ressourcen für die Herstellung! Stellen Sie dafür ein LGS in den Variablen $(x_1, \dots, x_5)$ auf, wobei x_i die Anzahl von Produkt i im Herstellungsprozess beschreibt.

(d) Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall. Sei $g = (0, \dots, 0, g_{k+1}, \dots g_n)$ ein Kundenauftrag an herzustellenden Produkten und $x_1, \dots, x_k$ die Ressourcen. Wie lautet das LGS jetzt?

(e) Zeigen Sie, dass das LGS nach x umgestellt werden kann und bestimmen Sie daraus für das obige Beispiel x in Abhängigkeit von g. Wie kann man daraus die benötigten Ressourcen ablesen?

(f) Der oben genannte Betrieb erhält mehrere Aufträge

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

   Wie viele Schrauben und Holzplatten muss er beschaffen?

Bemerkung. Dieses Verfahren scheint für ein so kleines Beispiel recht aufwändig. Der große Vorteil liegt aber darin, dass die in Aufgabenteil d) bestimmte Formel nur eine Multiplikation mit einer (für einen Betrieb) konstanten Matrix besteht (der *Technologiematrix*). Sie muss also nur einmal bestimmt werden, danach kann der Bedarf für beliebig viele Aufträge durch eine einfache Multiplikation errechnet werden. Bei Betrieben mit vielen tausend Produkten spart das eine Menge Zeit.