Lineare Algebra II
4. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
10. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Ähnlichkeit)
Seien A und B ähnliche Matrizen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) A und B haben die gleiche Determinante.

(b) A und B haben die gleiche Spur.

(c) A und B haben das gleiche charakteristische Polynom.

(d) A und B haben die gleichen Eigenwerte.

(e) A und B haben die gleichen Eigenvektoren.

(f) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn B diagonalisierbar ist.

Lösung: Sei $A \approx B$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix T, so dass $B = T^{-1}AT$ gilt.

(a) Die Aussage ist wahr: $\det B = \det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(T)\det(A) = \det A$.

(b) Die Aussage ist wahr und wurde schon in *Lineare Algebra I* gezeigt (Satz 6.1.5). Wer sich nicht erinnert, sollte es zur Übung nachweisen! Dafür zeigt man zunächst $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ und folgert daraus die Behauptung durch

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(T^{-1}AT) = \operatorname{tr}(T^{-1}(AT)) = \operatorname{tr}((AT)T^{-1}) = \operatorname{tr}(A(TT^{-1})) = \operatorname{tr}(A).$$

(c) Die Aussage ist wahr: es ist $T^{-1}E_nT = E_n$, also folgt

$$\det(B - \lambda E_n) = \det(T^{-1}AT - \lambda E_n) = \det(T^{-1}(A - \lambda E_n)T) = \det(A - \lambda E_n).$$

(d) Die Aussage ist wahr und folgt direkt aus c).

(e) Die Aussage ist falsch. Betrachten wir etwa φ als Spiegelung an der Winkelhalbierenden in $\mathbb{R}^2$. Sei A die darstellende Matrix von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}_1$ und B die darstellende Matrix von φ bezüglich der Eigenvektorbasis $\mathcal{B}_2 := \{(1,1)^T, (-1,1)^T\}$. Es ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da beide Matrizen die gleiche Abbildung darstellen, sind sie ähnlich. Andererseits sind die Eigenvektoren von A genau die Elemente von $\mathcal{B}_2$ und die Eigenvektoren von B genau die Elemente von $\mathcal{B}_1$.

(f) Die Aussage ist wahr: sei o.B.d.A. die Matrix A diagonalisierbar, es gelte also $A \approx D$ für eine Diagonalmatrix D. Andererseits ist $B \approx A$. Aus der Transitivität folgt $B \approx D$, also ist auch B diagonalisierbar.

Aufgabe T2 (Mehrfache Nullstellen)
Für ein Polynom $f = a_0 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$ bezeichnen wir mit

$$Df := a_1 + \ldots + na_nx^{n-1}$$

die Ableitung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) α ist eine mehrfache Nullstelle von f.

(b) α ist eine Nullstelle von f und Df.

(c) α ist eine Nullstelle von $\mathrm{ggT}(f, Df)$.

Tipp: Aus der Schule oder der Vorlesung *Analysis* wissen wir, dass $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ gilt.

Lösung:

a) $\Longrightarrow$ b): Da α eine mehrfache Nullstelle von f ist, gibt es ein Polynom g, so dass $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$ mit $k \geq 2$ gilt. Unter Benutzung des Tipps berechnen wir

$$Df = k(x-\alpha)^{k-1} g(x) + (x-\alpha)^k (Dg)(x).$$

Da $k \geq 2$ ist, folgern wir $Df(\alpha) = 0$.

b) $\Longrightarrow$ c): Da α eine Nullstelle von f und Df ist, muss es Polynome p und q geben mit

$$f = (x-\alpha)p \quad \text{und} \quad Df = (x-\alpha)q.$$

Es ist also $(x-\alpha)$ ein Teiler von f und Df. Da $h := \mathrm{ggT}(f, Df)$ von jedem anderen Teiler von f und Df geteilt werden muss, gibt es ein Polynom r mit $h = (x-\alpha)r$. Folglich ist $h(\alpha) = 0$.

c) $\Longrightarrow$ a): Es sei $h(\alpha) = 0$. Da h sowohl f als auch Df teilt, gilt auch $f(\alpha) = Df(\alpha) = 0$. Wir können also f schreiben als $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ und folgern

$$0 = Df(\alpha) = g(\alpha) + (\alpha - \alpha)Dg(\alpha) = g(\alpha).$$

Wir können also schreiben $g(x) = (x-\alpha)p(x)$ mit einem Polynom p. Eingesetzt in f erhalten wir $f = (x-\alpha)^2 p(x)$, es ist also α eine mehrfache Nullstelle von f.

Aufgabe T3 (Affine Abbildungen und deren Fixpunkte)

Unter einer *affinen Abbildung* verstehen wir eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \varphi_0(x) + b,$$

wobei φ_0 eine invertierbare lineare Abbildung und b einen festen Vektor bezeichnet. Ein *Fixpunkt* von φ ist ein Vektor x mit $\varphi(x) = x$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) := \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ affin}\}$ mit der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass φ einen Fixpunkt besitzt, wenn 1 kein Eigenwert von φ_0 ist.

(c) Finden Sie eine affine Abbildung ohne Fixpunkt, so dass φ_0 nicht die Identität ist.

Lösung:

(a) Die Identität ist natürlich affin (setze $\varphi_0 = \mathrm{id}$ und $b = 0$). Es gibt also ein neutrales Element. Assoziativität ist klar. Das Produkt von affinen Abbildung ist wieder affin: betrachten wir dafür $\varphi = \varphi_0 + b_1$ und $\psi = \psi_0 + b_2$. Dann ist

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi_0(\psi_0(x) + b_2) + b_1 = (\varphi_0 \circ \psi_0)(x) + (\varphi_0(b_2) + b_1).$$

Auch die Inversen von affinen Abbildungen liegen in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Sei $\varphi = \varphi_0 + b$. Dann ist

$$\varphi^{-1}(x) := \varphi_0^{-1}(x) - \varphi_0^{-1}(b)$$

die Inverse zu φ, denn es gilt

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(\varphi_0^{-1}(x) - \varphi_0^{-1}(b)) = x - b + b = x.$$

Auf die gleiche Weise zeigt man auch $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = x$, so dass φ^{-1} wirklich die Inverse zu φ ist.

(b) Da φ_0 nicht den Eigenwert 1 hat, ist $(\varphi_0 - \mathrm{id})$ invertierbar. Es gilt also

$$\varphi(x) = x \iff (\varphi_0 - \mathrm{id})(x) = -b \iff x = (\varphi_0 - \mathrm{id})^{-1}(-b).$$

Die Abbildung φ hat also den Fixpunkt $(\varphi_0 - \mathrm{id})^{-1}(-b)$.

(c) Aus b) wissen wir, dass φ_0 den Eigenwert 1 haben muss. Wählen wir φ_0 etwa als Spiegelung an der x-Achse, haben wir die Eigenwerte 1 und -1. Beispielsweise können wir also die Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(geschrieben in der Standardbasis) wählen. Die Gleichung $\varphi(x) = x$ ist dann nicht lösbar: wir erhalten den Widerspruch $x_1 + 1 = x_1$.