Lineare Algebra II
4. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
10. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Ähnlichkeit)
Seien A und B ähnliche Matrizen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) A und B haben die gleiche Determinante.

(b) A und B haben die gleiche Spur.

(c) A und B haben das gleiche charakteristische Polynom.

(d) A und B haben die gleichen Eigenwerte.

(e) A und B haben die gleichen Eigenvektoren.

(f) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn B diagonalisierbar ist.

Aufgabe T2 (Mehrfache Nullstellen)
Für ein Polynom $f = a_0 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ bezeichnen wir mit

$$Df := a_1 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

die Ableitung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) α ist eine mehrfache Nullstelle von f.

(b) α ist eine Nullstelle von f und Df.

(c) α ist eine Nullstelle von $\operatorname{ggT}(f, Df)$.

Tipp: Aus der Schule oder der Vorlesung *Analysis* wissen wir, dass $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ gilt.

Aufgabe T3 (Affine Abbildungen und deren Fixpunkte)
Unter einer *affinen Abbildung* verstehen wir eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \varphi_0(x) + b,$$

wobei φ_0 eine invertierbare lineare Abbildung und b einen festen Vektor bezeichnet. Ein *Fixpunkt* von φ ist ein Vektor x mit $\varphi(x) = x$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2) := \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ affin}\}$ mit der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass φ einen Fixpunkt besitzt, wenn 1 kein Eigenwert von φ_0 ist.

(c) Finden Sie eine affine Abbildung ohne Fixpunkt, so dass φ_0 nicht die Identität ist.