Lineare Algebra II
3. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
03. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Polynome)
Sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, also $a_i \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass jede ganzzahlige Nullstelle $t_0 \in \mathbb{Z}$ das Absolutglied a_0 teilen muss.

(b) Zeigen Sie, dass $p(t)$ weiterhin ganzzahlige Koeffizienten hat, nachdem durch einen Linearfaktor $(t - t_0)$ mit $t_0 \in \mathbb{Z}$ dividiert wurde.

(c) Ein schnelles Verfahren zur Auswertung von Polynomen ist das *Hornerschema*[1]. Wir wollen das Polynom

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{C}[t]$$

an einer Stelle t_0 auswerten. Dazu stellen wir folgendes Tableau auf:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0
	0	?	$\cdots$	?
t_0	?	?	$\cdots$	?

Die mit Fragezeichen gefüllten Zellen werden wie folgt ausgefüllt:

- Das Fragezeichen in der untersten Zeile wird ausgefüllt, indem die Summe der darüber liegenden Elemente gebildet wird.
- Das Fragezeichen in der Zeile darüber wird ausgefüllt, indem der unterste Eintrag der vorherigen Spalte mit t_0 multipliziert wird.

Zeigen Sie, dass im letzten Eintrag des Tableaus der Wert $q(t_0)$ steht. Wenden Sie das Hornerschema an, um das Polynom

$$p(t) = 3t^3 - 2t^2 + 6t - 4$$

an der Stelle $t_0 = 4$ auszuwerten.

(d) Das Hornerschema liefert auch ein einfaches Verfahren zur Polynomdivision. Setzen wir einen Wert t_0 mit $q(t_0) = 0$ ein, so erhalten wir ein Schema der folgenden Form:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0
	0	?	$\cdots$	?
t_0	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	0

Zeigen Sie, dass dann das Polynom $\tilde{q}(t) = b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_0$ das Ergebnis der Polynomdivision von $q(t)$ durch den Linearfaktor $(t - t_0)$ ist. Benutzen Sie diese Erkenntnis, um mit dem Hornerschema den Linearfaktor $(t - 7)$ von dem Polynom

$$p(t) = t^3 - 7t^2 + 3t - 21$$

abzuspalten.

Lösung:

[1] Benannt nach William Horner, 1786–1837. Das Verfahren war aber bereits Mathematikern im 12. Jahrhundert bekannt.

(a) Da t_0 eine Nullstelle ist, gilt

$$0 = p(t_0) = a_0 + a_1 t_0 + \ldots + a_n t_0^n = a_0 + t_0(a_1 + \ldots + a_n t_0^{n-1}).$$

Damit ist $a_0 = t_0 \cdot (-a_1 - \ldots - a_n t_0^{n-1})$, der Term in Klammern ist nach Voraussetzung ganzzahlig. Also teilt t_0 das Absolutglied.

(b) Angenommen, es gilt

$$p(t) = a_0 + \ldots + a_n t^n = (\tilde{a}_0 + \ldots + \tilde{a}_{n-1} t^{n-1}) \cdot (t - t_0).$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir für $k = 1, \ldots, n-1$, dass

$$a_k = \tilde{a}_{k-1} - t_0 \tilde{a}_k \tag{1}$$

gilt. Außerdem ist $\tilde{a}_n = a_n$. Da $a_0 = -t_0 \tilde{a}_0$ gilt, muss $\tilde{a}_0$ ganzzahlig sein. Durch die Rekursion (1) folgt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

(c) Durch Ausklammern sehen wir

$$q(t) = (\cdots((a_n t_0 + a_{n-1})t_0 + a_{n-2})t_0 + \cdots)t_0 + a_0,$$

also stimmt der letzte Eintrag im Hornerschema mit $q(t_0)$ überein. Für das gegebene Polynom berechnet man

	3	−2	6	−4
	0	12	40	184
4	3	10	46	180

also gilt $p(4) = 180$.

(d) Wie wir schon in b) gezeigt haben, gilt wegen $q(t) = \tilde{q}(t) \cdot (t - t_0)$ die Rekursion (1). Diese entspricht genau dem Berechnungsschritt im Hornerschema.
Für das konkrete Polynom berechnen wir

	1	−7	3	−21
	0	7	0	21
7	1	0	3	0

Also gilt $(t^3 - 7t^2 + 3t - 21) : (t - 7) = (t^2 + 3)$.

Aufgabe T2 (Wiederholung: Permutationen und Gruppen)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne

$$S_n := \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ bijektiv}\}$$

die symmetrische Gruppe auf den Elementen $1, \ldots, n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Permutationen

$$A_n := \{\sigma \in S_n \ : \ \sigma \text{ gerade}\}$$

eine Untergruppe der S_n bildet. Sie heißt *alternierende Gruppe*.
Zur Erinnerung: eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe*, wenn sie das neutrale Element enthält und mit der Operation von G wiederum eine Gruppe bildet.

(b) Bilden die ungeraden Permutationen $B_n := S_n \setminus A_n$ eine Untergruppe?

(c) Für welche n gibt es eine Bijektion $f : A_n \to B_n$? Geben Sie f in diesen Fällen an.

(d) Wie viele Elemente sind in A_n und B_n enthalten?

(e) Bestimmen Sie für $n = 3$ die Mengen S_n, A_n und B_n.

Lösung:

(a) • Es ist $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$, also ist $\mathrm{id} \in A_n$.
Wir wissen bereits, dass $\operatorname{sgn}: S_n \to S_n$ multiplikativ ist. Daher folgt aus $\sigma, \tau \in A_n$ bereits
- $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau = 1$. Es ist also $\sigma \circ \tau \in A_n$.
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma)^{-1} = 1$. Es ist also für jedes $\sigma \in A_n$ auch $\sigma^{-1} \in A_n$.

(b) Nein, B_n ist keine Untergruppe. Im Fall $n = 1$ ist $B_n = \emptyset$. Ansonsten ist $\mathrm{id} \notin B_n$.

(c) Für alle $n \geq 2$ existiert eine solche Bijektion. Wir setzen

$$f : A_n \to B_n, \qquad \sigma \mapsto \sigma \circ (1\ 2)$$

Aus $f(\sigma) = f(\tau)$ folgt $\sigma \circ (1\ 2) = \tau \circ (1\ 2)$ und damit $\sigma = \tau$. Folglich ist f injektiv. Für die Surjektivität sei τ ungerade. Dann ist $\sigma := \tau \circ (1\ 2)$ gerade und es ist $f(\sigma) = \tau$.

Alternative: man überprüft $f^2 = \mathrm{id}$, woraus ebenfalls Bijektivität folgt.

Natürlich hätte man auch die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ für eine beliebige ungerade Permutation τ betrachten können.

(d) Für $n = 1$ bestehen S_n und A_n nur aus der Identität, B_n ist leer. Ansonsten wissen wir aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass A_n und B_n gleich viele Elemente enthalten und außerdem $S_n = A_n \cup B_n$ gilt. Damit erhalten wir

$$|A_n| = |B_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}.$$

(e) In Zykelschreibweise ist $S_3 = \{\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ sowie

$$A_n = \{\mathrm{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}, \qquad B_n = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}.$$

Aufgabe T3 (Wiederholung: Nullstellen von Polynomen und komplexe Zahlen)
Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$!

$$\begin{aligned} p(t) &= t^3 - 7t^2 + 3t - 21 \in \mathbb{Z}[t] \\ q(t) &= it^3 + (2-2i)t^2 - 3t + (1+i) \in \mathbb{C}[t] \\ r_n(t) &= t^n - 1 \in \mathbb{R}[t] \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} p(t) &= t^3 - 7t^2 + 3t - 21 = (t-7)(t^2+3) = (t-7)(t-\sqrt{3}i)(t+\sqrt{3}i) \\ q(t) &= it^3 + (2-2i)t^2 - 3t + (1+i) = i(t-1)(t-i)(t-(1+i)) \\ r_n(t) &= t^n - 1 = (t-1)(t-e^{2\pi i/n}) \cdots (t - e^{2(n-1)\pi i/n}) \end{aligned}$$

Die Zerlegung von p und q erhält man durch Erraten einer ersten Nullstelle (eine mögliche Anwendung der Hornerschemas, das Polynom $p(t)$ ist schon in Aufgabe T1 untersucht worden) mit anschließender Polynomdivision und Anwendung der Lösungsformel für Polynome zweiten Grades.

Die Nullstellen von r_n kann man durch Polarkoordinaten bestimmen: offenbar muss jedes $t \in \mathbb{C}$, welches die Gleichung $r_n(t) = 0$ erfüllt, Länge 1 haben. Durch den Ansatz

$$e^0 = 1 = t^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$$

sehen wir, dass $n\varphi = 2k\pi \iff \varphi = 2k\pi/n$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten muss. Für jedes $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ erhalten wir also eine Nullstelle.

Insbesondere sehen wir, dass $p(t)$ und $q(t)$ nur über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfallen. Das Polynom $r_n(t)$ zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, wenn $n = 1$ oder $n = 2$ gilt.