Lineare Algebra II
3. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
03. Mai 2011

Aufgabe T1 (Zum Aufwärmen: Polynome)
Sei $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, also $a_i \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass jede ganzzahlige Nullstelle $t_0 \in \mathbb{Z}$ das Absolutglied a_0 teilen muss.

(b) Zeigen Sie, dass $p(t)$ weiterhin ganzzahlige Koeffizienten hat, nachdem durch einen Linearfaktor $(t - t_0)$ mit $t_0 \in \mathbb{Z}$ dividiert wurde.

(c) Ein schnelles Verfahren zur Auswertung von Polynomen ist das *Hornerschema*[1]. Wir wollen das Polynom

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{C}[t]$$

an einer Stelle t_0 auswerten. Dazu stellen wir folgendes Tableau auf:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0
	0	?	$\cdots$	?
t_0	?	?	$\cdots$	?

Die mit Fragezeichen gefüllten Zellen werden wie folgt ausgefüllt:

- Das Fragezeichen in der untersten Zeile wird ausgefüllt, indem die Summe der darüber liegenden Elemente gebildet wird.
- Das Fragezeichen in der Zeile darüber wird ausgefüllt, indem der unterste Eintrag der vorherigen Spalte mit t_0 multipliziert wird.

Zeigen Sie, dass im letzten Eintrag des Tableaus der Wert $q(t_0)$ steht. Wenden Sie das Hornerschema an, um das Polynom

$$p(t) = 3t^3 - 2t^2 + 6t - 4$$

an der Stelle $t_0 = 4$ auszuwerten.

(d) Das Hornerschema liefert auch ein einfaches Verfahren zur Polynomdivision. Setzen wir einen Wert t_0 mit $q(t_0) = 0$ ein, so erhalten wir ein Schema der folgenden Form:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0
	0	?	$\cdots$	?
t_0	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	0

Zeigen Sie, dass dann das Polynom $\tilde{q}(t) = b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_0$ das Ergebnis der Polynomdivision von $q(t)$ durch den Linearfaktor $(t - t_0)$ ist. Benutzen Sie diese Erkenntnis, um mit dem Hornerschema den Linearfaktor $(t - 7)$ von dem Polynom

$$p(t) = t^3 - 7t^2 + 3t - 21$$

abzuspalten.

Aufgabe T2 (Wiederholung: Permutationen und Gruppen)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne

$$S_n := \{\sigma \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ bijektiv}\}$$

die symmetrische Gruppe auf den Elementen $1, \ldots, n$.

[1] Benannt nach William Horner, 1786–1837. Das Verfahren war aber bereits Mathematikern im 12. Jahrhundert bekannt.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der geraden Permutationen

$$A_n := \{\sigma \in S_n \ : \ \sigma \text{ gerade}\}$$

eine Untergruppe der S_n bildet. Sie heißt *alternierende Gruppe*.

Zur Erinnerung: eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe*, wenn sie das neutrale Element enthält und mit der Operation von G wiederum eine Gruppe bildet.

(b) Bilden die ungeraden Permutationen $B_n := S_n \setminus A_n$ eine Untergruppe?

(c) Für welche n gibt es eine Bijektion $f : A_n \to B_n$? Geben Sie f in diesen Fällen an.

(d) Wie viele Elemente sind in A_n und B_n enthalten?

(e) Bestimmen Sie für $n = 3$ die Mengen S_n, A_n und B_n.

Aufgabe T3 (Wiederholung: Nullstellen von Polynomen und komplexe Zahlen)
Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$!

$$\begin{aligned} p(t) &= t^3 - 7t^2 + 3t - 21 \in \mathbb{Z}[t] \\ q(t) &= it^3 + (2-2i)t^2 - 3t + (1+i) \in \mathbb{C}[t] \\ r_n(t) &= t^n - 1 \in \mathbb{R}[t] \end{aligned}$$