Lineare Algebra II
2. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
26. April 2011

Aufgabe T1
Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & (\lambda-3)(3-\lambda)+1 \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda-4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-2)\det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2+6\lambda-8 \\ -1 & 2\lambda-4 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-2)(2\lambda-4-\lambda^2+6\lambda-8) \\
&= -(\lambda-2)^2(\lambda-6).
\end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$. Die Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 2$ berechnen sich durch Lösen des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = 6$ berechnen sich ebenso:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabe T2

(a) Sei v ein Eigenvektor der invertierbaren Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann v auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$ ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ und s ein Skalar. Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von $A - sE$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von den folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Sei λ Eigenwert von A und v ein dazugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $Av = \lambda v$. Da A invertierbar ist, existiert A^{-1} und wir erhalten durch eine Multiplikation von links: $v = \lambda A^{-1}v$. Durch Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda}$ ergibt sich dann $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$ (es ist $\lambda \neq 0$, da A invertierbar ist). Also ist v Eigenvektor von A^{-1} bzgl. Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

(b) Aus $Av = \lambda v$ und $sEv = sv$ erhält man durch Subtraktion: $Av - sEv = \lambda v - sv$. Durch Ausklammern ergibt sich nun $(A - sE)v = (\lambda - s)v$, also ist v ein Eigenvektor von $A - sE$ zum Eigenwert $\lambda - s$.

(c)
- Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

  Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, die Eigenwerte von A. Durch Lösen der drei homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda_j & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda_j & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,3$$

  erhält man als Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_3.$$

- Da A invertierbar ist, sind nach a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{3}$ die Eigenwerte von A^{-1}. Die Eigenvektoren sind die gleichen wie für A, ebenfalls nach a).
- Man erkenne

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A - 3E_3$$

  und erhält aus b), dass die Eigenwerte nun $\lambda_1 = 1 - 3 = -2, \lambda_2 = 2 - 3 = -1, \lambda_3 = 3 - 3 = 0$ sind, jeweils zugehörige Eigenvektoren aber die gleichen wie für A sind.

Aufgabe T3
Wir betrachten die Menge der Polynome

$$\mathbb{P}_n := \{f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = (1, x, \ldots, x^n)$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$ ist.

(b) Überlegen Sie sich, dass die Abbildung

$$D\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n, \quad f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} =: f'$$

linear ist. Finden Sie eine Matrixdarstellung von D bezüglich B.

(c) Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $D^k = 0$ gilt. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von D. Ist D diagonalisierbar?

(d) Bestimmen Sie alle polynomialen Lösungen der Gleichung $f' = \lambda \cdot f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) (*) Wenn wir die Ableitung D als Abbildung des Raums aller differenzierbaren Funktionen betrachten, welche Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ kommen dann als Eigenwerte vor? Bestimmen Sie auch zugehörige Eigenvektoren. Was bedeutet das in diesem Fall für die Gleichung $f' = \lambda \cdot f$?

Lösung:

(a) Die Basiselemente sind linear unabhängig, denn für die Gleichung

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 = 0 + 0 \cdot x + \ldots + 0 \cdot x^n$$

folgt durch Koeffizientenvergleich bereits $a_0 = \ldots = a_n = 0$. Offensichtlich lässt sich jedes Element von $\mathbb{P}_n$ als Linearkombination von Elementen aus B schreiben. Also ist B eine Basis.

(b) Für zwei Poynome $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$D(f + \lambda g) = D\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + \lambda b_i) x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i(a_i + \lambda b_i) x^{i-1} = Df + \lambda Dg.$$

Es ist $Dx^k = kx^{k-1}$ für alle $1 \leq k \leq n$ und $D1 = 0$. Daher lautet die Matrixdarstellung

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Man rechnet schnell nach, dass $D^{n+1} = 0$ ist (die Matrix D^k hat nur von Null verschiedene Einträge auf der k-ten Nebendiagonale). Da die Matrix obere Dreiecksgestalt hat, lautet das charakteristische Polynom

$$\det(D - \lambda E) = (-\lambda)^{n+1}.$$

Der einzige Eigenwert ist also $\lambda = 0$. Um den Eigenraum zu bestimmen, ermitteln wir die Lösungen des Gleichungssystems

$$D\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = 0 \iff a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Der Eigenraum ist also eindimensional und entspricht genau $\mathbb{R}$.
Insbesondere ist D nicht diagonalisierbar.

(d) Wir haben gesehen, dass die einzige Lösung von $Df = \lambda f$ die Nulllösung $\lambda = 0$ und $f \in \mathbb{R}$ ist. Es lösen also nur konstante Polynome diese Gleichung.

(e) Die Abbildung $f_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$ erfüllt $Df = \lambda f$. Es kommt also jede Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert vor, ein zugehöriger Eigenvektor ist dabei f_λ. Insbesondere ist die Gleichung $f' = \lambda f$ für jede Zahl λ durch nicht-konstante Funktionen lösbar.