Lineare Algebra II
2. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
26. April 2011

Aufgabe T1

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T2

(a) Sei v ein Eigenvektor der invertierbaren Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann v auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$ ist.

(b) Sei v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ und s ein Skalar. Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor von $A - sE$ zum Eigenwert $\lambda - s$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von den folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T3

Wir betrachten die Menge der Polynome

$$\mathbb{P}_n := \{ f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B = (1, x, \ldots, x^n)$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$ ist.

(b) Überlegen Sie sich, dass die Abbildung

$$D\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n, \quad f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} =: f'$$

linear ist. Finden Sie eine Matrixdarstellung von D bezüglich B.

(c) Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $D^k = 0$ gilt. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von D. Ist D diagonalisierbar?

(d) Bestimmen Sie alle polynomialen Lösungen der Gleichung $f' = \lambda \cdot f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) (*) Wenn wir die Ableitung D als Abbildung des Raums aller differenzierbaren Funktionen betrachten, welche Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ kommen dann als Eigenwerte vor? Bestimmen Sie auch zugehörige Eigenvektoren. Was bedeutet das in diesem Fall für die Gleichung $f' = \lambda \cdot f$?