Lineare Algebra II
1. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
19. April 2011

Aufgabe T1 (Wege zur Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf folgende Weisen:

(a) Mit der Definition $\det A := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}$,

(b) mit der Regel von Sarrus,

(c) indem Sie A durch Anwendung der Determinanteneigenschaften in Dreiecksgestalt bringen und

(d) durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte.

Bestimmen Sie außerdem A^2 und A^{-1} und deren Determinanten!

Lösung:

(a) Es ist $S_3 = \{\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Das Signum der Zweierzykel ist -1, alle anderen Permutationen haben positives Vorzeichen. Also ist

$$\det A = 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

(b) Wir berechnen

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

(c) Wir verwenden nur Operationen, unter denen die Determinante invariant bleibt, und erhalten

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

(d) Durch Entwicklung nach der zweiten Spalte erhalten wir

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 2 = 4.$$

Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

und nach den Rechenregeln für Determinanten ist $\det(A^2) = (\det A)^2 = 16$ sowie $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe T2 (Determinante als Flächeninhalt)
Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig und

$$P := \{av + bw \mid a, b \in [0,1]\}$$

das von den beiden Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm. Wir bezeichnen mit $\mathrm{vol}(P)$ den zweidimensionalen Flächeninhalt von P.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}(P) = |\det(v,w)|$ gilt. Überlegen Sie sich dafür, warum Sie ohne Einschränkung $v = (v_1, 0)$ annehmen können.

(b) Zeigen Sie, dass sich P als das Bild des Einheitsquadrates $Q = [0,1]^2$ unter einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ schreiben lässt. Welche Einträge hat A?

(c) Folgern Sie, dass für eine beliebige invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$|\det A| = \mathrm{vol}(A \cdot Q). \tag{1}$$

(d) Was passiert, wenn v und w linear abhängig sind? Was ist, wenn A nicht invertierbar ist?

(e) (*) Gilt (1) auch in Dimension 3, wenn wir das Volumen an Stelle des Flächeninhalts betrachten? Was ist mit Dimension $n \geq 4$?

Wir sehen also, dass wir die Determinante einer Matrix als Volumenänderung der linearen Abbildung auffassen können, die von ihr dargestellt wird. Insbesondere sehen wir, dass die Determinante nicht von der gewählten Basis abhängt.

Lösung:

(a) Das Volumen und die Determinante sind invariant unter Rotationen. Daher können wir P so drehen, dass $v = (v_1, 0)$ gilt. Das Volumen berechnet sich dann zu

$$\mathrm{vol}(P) = |v_1| \cdot |w_2| = |v_1 w_2| = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(v,w)|.$$

(b) Wir setzen $A := (v, w)$ als die Matrix, deren Spalten die Vektoren v und w sind. Dann ist A invertierbar, da v und w linear unabhängig sind. Die Matrix A bildet also die Vektoren, die Q aufspannen, auf die Vektoren ab, die P aufspannen.

(c) Es ist

$$\mathrm{vol}(A \cdot Q) \overset{(b)}{=} \mathrm{vol}(P) \overset{(a)}{=} |\det A|.$$

(d) In beiden Fällen verschwinden sowohl die Determinante von A als auch das Volumen von P. Die bisherigen Aussagen bleiben also richtig.

(e) Auch in allen höheren Dimensionen stimmen diese Aussagen. Für Dimension 3 führen wir zunächst wieder eine Rotation aus, so dass die ersten beiden aufspannenden Vektoren v_1 und v_2 in der xy-Ebene liegen. Wir können also $v_1 = (x_1, y_1, 0)$ und $v_2 = (x_2, y_2, 0)$ annehmen. Das Volumen des von v_1, v_2 und $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ aufgespannten Körpers P (dieser nennt sich "Parallelepiped") ist dann das Produkt aus der Grundfläche mal der Höhe. Der Flächeninhalt der Grundfläche ist gegeben durch $\det(v_1, v_2)$, die Höhe entspricht genau z_3. Damit gilt

$$|\det(v_1, v_2, v_3)| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \det(v_1, v_2) \cdot z_3 \right| = \mathrm{vol}\, P.$$

Induktiv folgt die Aussage sogar für alle $n \geq 2$.

Aufgabe T3 (Eigenschaften der Determinante)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen, indem Sie die Eigenschaften der Determinantenabbildung benutzen:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_4 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 := \begin{pmatrix} -27 & 31 & 17 & 23 \\ 52 & 21 & -21 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Es ist $M_1 = A^T$, wobei A die Matrix aus Aufgabe T1 ist. Daher ist $\det M_1 = 4$.
- In M_2 stimmt die erste Zeile mit der dritten Zeile überein, also ist $\det M_2 = 0$.
- Die dritte Matrix entsteht aus M_1, indem wir die Permutation $(1\ 2\ 3)$ auf die Spalten von M_1 anwenden. Da $\operatorname{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$ gilt, ist $\det M_3 = 4$.
- In M_4 ist die letzte Zeile das doppelte der ersten Zeile, also ist auch hier $\det M_4 = 0$.
- Die letze Matrix ist eine Blockdiagonalmatrix. Im unteren rechten Block ist die zweite Spalte das doppelte der ersten Spalte, also hat dieser Block Determinante 0 und daher ist insgesamt $\det M_5 = 0$.

Aufgabe T4 (Determinante einer Abbildung)
Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$M : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 6b + 4c + 3d & 2b + c + 3d \\ -3b + 2d & d - b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det M$!

Lösung: Die Linearität von M ist klar (oder man rechnet sie schnell nach).
Zunächst bestimmen wir eine Matrixdarstellung von M. Als Basis wählen wir uns

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =: (b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren:

$$M b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M b_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich dieser Basis lautet die Matrixdarstellung von M also

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist in Blockdiagonalgestalt. Der obere linke Block hat Determinante 1. Den unteren rechten Block entwickeln wir nach der zweiten Spalte und damit folgt

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Eine andere Wahl der Basis würde zu einer anderen Matrixdarstellung führen. Die Determinante bliebe aber gleich.