Lineare Algebra II
1. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Susanne Kürsten
Tristan Alex

SS 2011
19. April 2011

Aufgabe T1 (Wege zur Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf folgende Weisen:

(a) Mit der Definition $\det A := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}$,

(b) mit der Regel von Sarrus,

(c) indem Sie A durch Anwendung der Determinanteneigenschaften in Dreiecksgestalt bringen und

(d) durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte.

Bestimmen Sie außerdem A^2 und A^{-1} und deren Determinanten!

Aufgabe T2 (Determinante als Flächeninhalt)
Es seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig und

$$P := \{av + bw \mid a, b \in [0,1]\}$$

das von den beiden Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm. Wir bezeichnen mit $\operatorname{vol}(P)$ den zweidimensionalen Flächeninhalt von P.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{vol}(P) = |\det(v, w)|$ gilt. Überlegen Sie sich dafür, warum Sie ohne Einschränkung $v = (v_1, 0)$ annehmen können.

(b) Zeigen Sie, dass sich P als das Bild des Einheitsquadrates $Q = [0,1]^2$ unter einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ schreiben lässt. Welche Einträge hat A?

(c) Folgern Sie, dass für eine beliebige invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$|\det A| = \operatorname{vol}(A \cdot Q). \tag{1}$$

(d) Was passiert, wenn v und w linear abhängig sind? Was ist, wenn A nicht invertierbar ist?

(e) (*) Gilt (1) auch in Dimension 3, wenn wir das Volumen an Stelle des Flächeninhalts betrachten? Was ist mit Dimension $n \geq 4$?

Wir sehen also, dass wir die Determinante einer Matrix als Volumenänderung der linearen Abbildung auffassen können, die von ihr dargestellt wird. Insbesondere sehen wir, dass die Determinante nicht von der gewählten Basis abhängt.

Aufgabe T3 (Eigenschaften der Determinante)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen, indem Sie die Eigenschaften der Determinantenabbildung benutzen:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_4 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 := \begin{pmatrix} -27 & 31 & 17 & 23 \\ 52 & 21 & -21 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \\ 0 & 0 & -17 & -34 \end{pmatrix}$$

Aufgabe T4 (Determinante einer Abbildung)
Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$M : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 6b + 4c + 3d & 2b + c + 3d \\ -3b + 2d & d - b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det M$!