Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
11.Februar 2003

Semestralklausur Analysis I

für M, HLM, PH und Gäste
WS 2002/2003

Note:

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummeriert, am Schluß der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Die Klausurergebnisse hängen am 14. Februar ab 9:00 Uhr vor Zimmer S2-15/107. Die Klausureinsicht findet am 14. Februar von 12:30 Uhr bis 14:30 Uhr statt.

BITTE IN BLOCKSCHRIFT AUSFÜLLEN
Name: ....
Vorname: ....
Matr.-Nr.: ....
Fachrichtung: ....
Übungsgruppenleiter: ....

Wichtige Hinweise:

- Bearbeitungszeit: **120 Minuten**, Gesamtpunktzahl: **40 Punkte + 5 Zusatzpunkte**. Mit 20 Punkten ist die Klausur bestanden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine.
- Bis auf die Zusatzaufgabe werden **alle** gestellten Aufgaben verlangt. Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen. **Achten Sie darauf, dass sich alle Begründungen auf den Inhalt dieser Analysis-Vorlesung (Kümmerer) beziehen.**
- **Achtung:** Klausur besteht aus 2 Seiten.
- Alle Blätter dürfen nur **einseitig** beschrieben werden.
- **Tip:** Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick, bevor Sie beginnen.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Z	Summe
Mögl. Punktzahl	4	2	1	1	2	5	4	5	3	8	5	5	40+5
Err. Punktzahl													

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Metrik auf einer Menge X an.
Interpretieren Sie die Axiome anschaulich.

(b) Geben Sie die Definition einer konvergenten Folge in $\mathbb{C}$ an.

(c) Verneinen Sie die Definition einer Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ (mit Quantoren).

Aufgabe 2 (2 Punkte) Wer stellte die Axiome für die natürlichen Zahlen auf, wie sie in der Vorlesung definiert wurden? In welches Jahrhundert fällt das?
Diskutieren Sie, warum man an einem axiomatischen Aufbau des Zahlensystems interessiert ist.

Aufgabe 3 (1 Punkt) Auf wieviele Arten kann man einen Dreierausschuss aus sechs Personen bilden?

Aufgabe 4 (1 Punkt) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $a_n := \sqrt[n]{n}$ und was ist gegebenenfalls ihr Grenzwert? (Nur die Antwort, keine Begründung!)

Aufgabe 5 (2 Punkte) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+1)$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die wichtigen Schritte der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.
(Verbal und ohne Beweise reicht!)

(b) Geben Sie zwei Sätze an, die nur gelten, weil $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $a_n := \frac{1}{3^n-n}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Diskutieren Sie die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a^n$ und $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

(a) Stellen Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit reellen Zahlen a und b dar:
(i) $\frac{3+i}{3-i}$, (ii) $(-1+i)^9$.
Skizzieren Sie zusätzlich $-1+i$ und $(-1+i)^9$ in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -8i$.

Aufgabe 9 (3 Punkte)

(a) Welche Implikationen gelten zwischen diesen beiden Aussagen? (ohne Beweis)
(i) $\sum_n a_n$ ist konvergent, (ii) $(|a_n|)_n$ ist Nullfolge.

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.
Begründen Sie jeden Schritt.

Aufgabe 10 (8 Punkte) Auf $M := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ sei eine Relation definiert durch:
$z_1 \sim z_2$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, gibt, so dass $z_2 = \lambda \cdot z_1$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass hierdurch eine Äquivalenzrelation definiert ist.

(b) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen und den Quotientenraum $M/\sim$.

(c) Auf M ist eine Multiplikation „$*$" durch $z_1 * z_2 := x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, definiert. Zeigen Sie, dass hierdurch eine wohldefinierte Multiplikation auf der Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$ gegeben ist.

(d) Interpretieren Sie Teil (c) geometrisch.

Aufgabe 11 (5 Punkte) Welche der folgenden Behauptungen sind wahr? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(a) Konvergieren die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergieren auch die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Divergiert die Summe $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zweier Folgen, so divergieren auch die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.

Zusatzaufgabe (5 Punkte) (anspruchsvoll) Greifen Sie Aufgabe 7(b) nochmals auf, und untersuchen Sie das Verhalten der Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = a^n$ für $a \in \mathbb{C}, |a| = 1$ genauer:
Für welche a weist das Verhalten der Folge eine Periode auf? Was geschieht in den anderen Fällen?