Eliminationsalgorithmus

Satz:

Wir haben gezeigt:

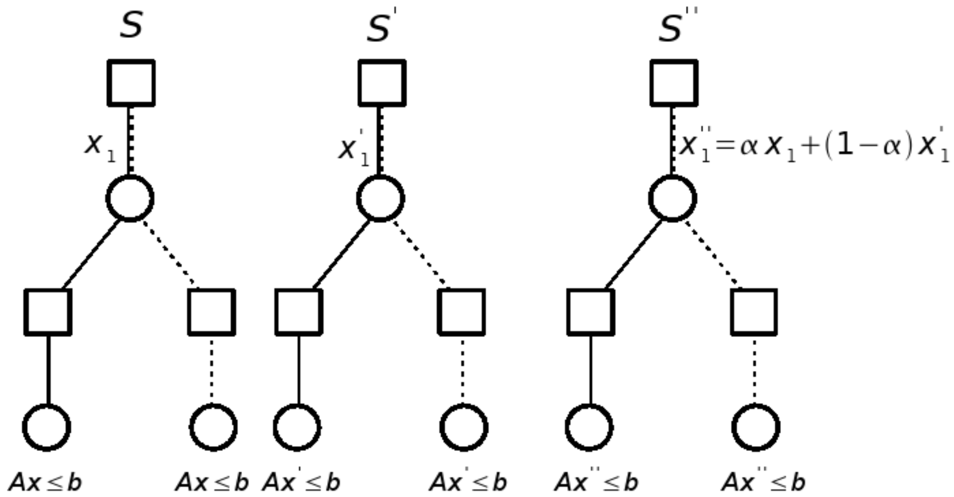
1. Wenn die innerste Variable des Quantorblocks eine All-Variable ist, lässt sie eleminieren, indem man in die letzte Variable Zeile für Zeile die gegenüber dem Existenzspieler bösartigste Schranke einsetzt.
2. Wenn die innerste Varaible eine Existenzvariable ist, lässt sich die Fourier-Motzkin Elemination zur Elemination der innersten Variable anwenden.
3. Diese beiden Schritte lassen sich mehrfach anwenden.

Es folgt: Der Algorithmus QLP-Decide(A,b) entscheidet Problem G korrekt.

Definition 2. (Konvexkombination von Strategien)
Seien S und S' zwei Strategien für die gleiche QLP Instanz. S''=(V,E,L'') wird als Konvexkombination von S=(V,E,L) und S'=(V,E,L') bezeichnet falls es ein $\alpha \in [0,1]$ *gibt, so dass sich für jede Kante* $e_i \in E$ *der Kantenwert ergibt als* $l_i'' = \alpha l_i' + (1-\alpha) l_i$

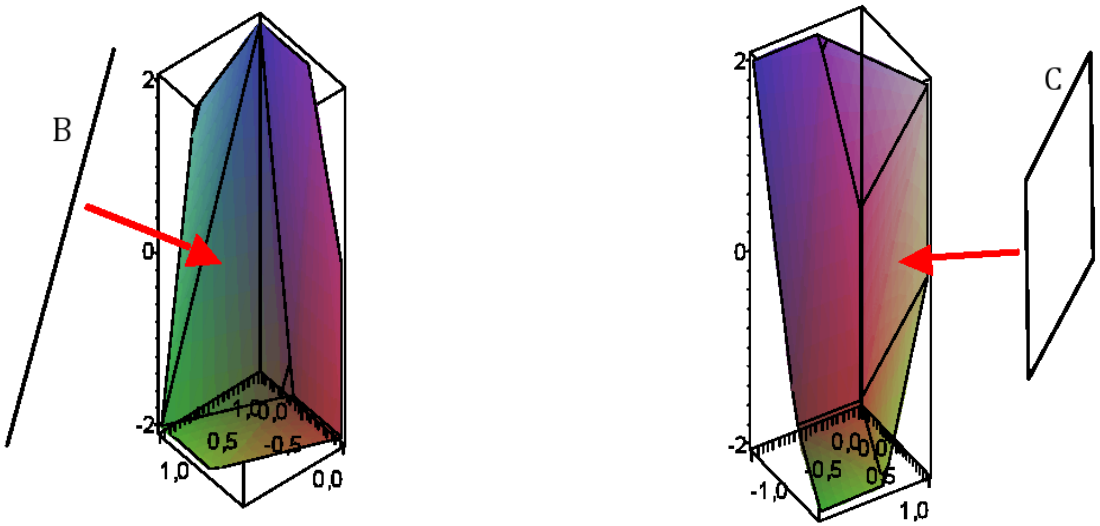
Lemma 1. (Strategiekonvexität)
Wenn S und S' Gewinnstrategien für den Existenzspieler sind, dann ist auch S''=αS'+(1-α)S mit $\alpha \in [0,1]$ *eine Gewinnstrategie.*

Idee:



Polyedrische Eigenschaften von QLPs

Relaxiert man die Ganzzahligkeitsbedingung weiter, so dass auch der Allspieler aus dem kontinuierlichen wählen darf, der Wertebereiche, so wird der Lösungsraum ***polyedrisch.***



Definition 3. (Politik)

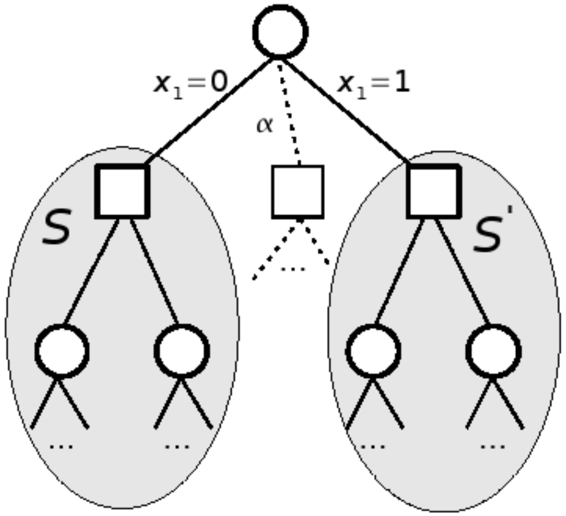
Eine Politik ist ein Algorithmus, welcher die i-te Komponente x_i des x-Vektors, bei Kenntnis der vorherigen Belegungen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ fixiert, oder Unlösbarkeit feststellt

Lemma 2. (Politikenkonvexität)

Sind P und P' Gewinnpolitiken für den Existenzspieler, dann ist auch P''=αP'+(1-α)P eine Gewinnpolitk für diesen Spieler.

Beweisidee:

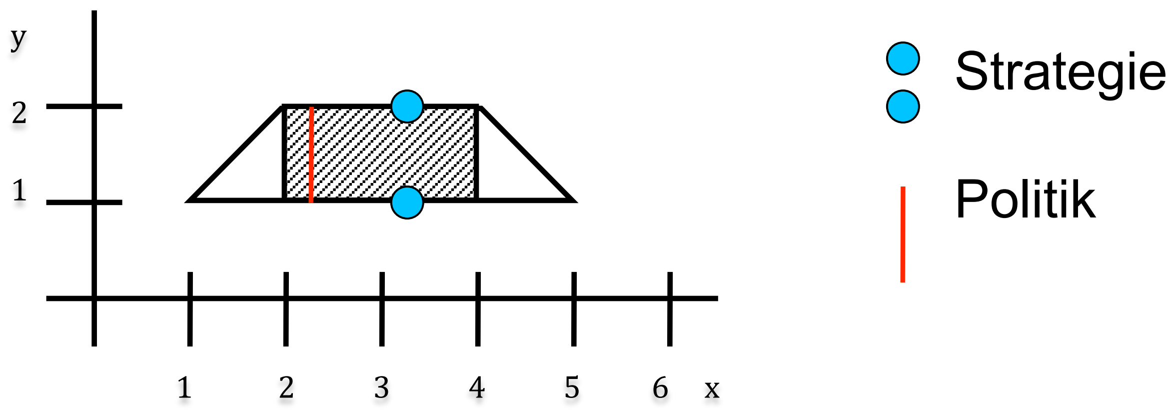
- Allspieler hat ersten Zug $x_1 \in [0,1]$
- Alle anderen Züge des Allspielers sind aus {0,1}
- S ist Gewinnstrategie für $x_1 = 0$, S' für $x_1 = 1$
- Für jedes $x_1 = \alpha \in [0,1]$ ist S''=αS'+(1-α)S eine Gewinnstrategie



Folgerung: Es existiert eine **Gewinnstrategie** für den Existenzspieler, gegen den auf seine ganzzahligen Variablengrenzen beschränkten Allspieler, **<u>genau dann wenn</u>** eine **Gewinnpolitik** gegen den Allspieler ohne diese Beschränkung existiert.

Satz 1

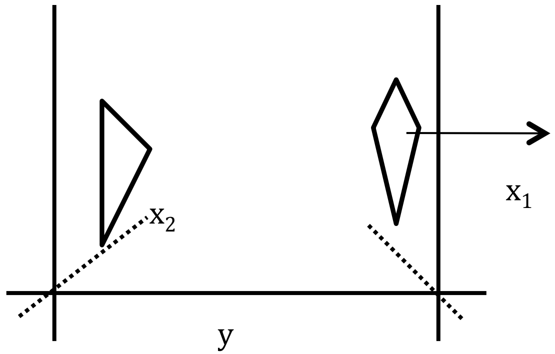
1. Der Lösungsraum eines QLPs, d.h. die Vereinigung aller Gewinnpolitiken des Existenzspielers, ist ein Polytop.



Polyedrische Eigenschaften von QLPs

Satz 2:

2. Jeder Eckpunkt des Lösungsraumes eines QLPs, bei dem der Allspieler zum Ausspielen von Extremen gezwungen wird, kann mit polynomiell vielen Bits beschrieben werden

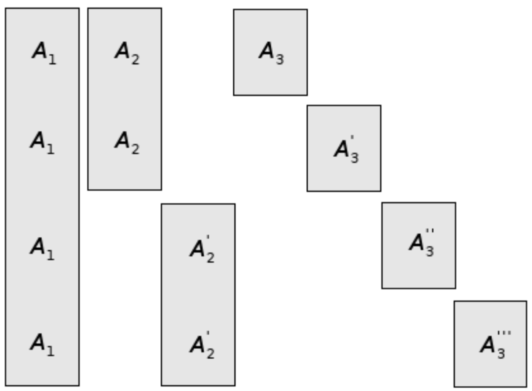


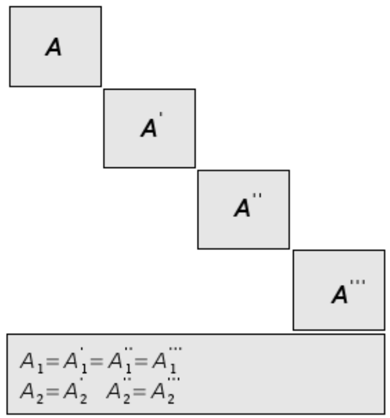
Menge der möglichen gewinnbringenden Zugfolgen des Existenzspielers unter Beachtung der „strategischen Constraints“ und einer speziellen Zugfolge des All-Spielers.
Wie kommt man an deren Eckenkomplexität?

Polyedrische Eigenschaften von QLPs

Deterministisches Lineares Äquivalentes Programm (D.E.P):

- Technik aus der Stochastischen Programmierung
- Endlich viele Szenarien durch Diskretisierung der Wahrscheinlichkeits-verteilungen
- Für jedes Szenario wird das gesamte LP repliziert
- Entscheidungen dürfen nicht von zukünftigen Ereignissen beeinflusst werden (Non-Anticipativity)
- Formulierung mittels ***Compact-View*** oder ***Split-Variable***

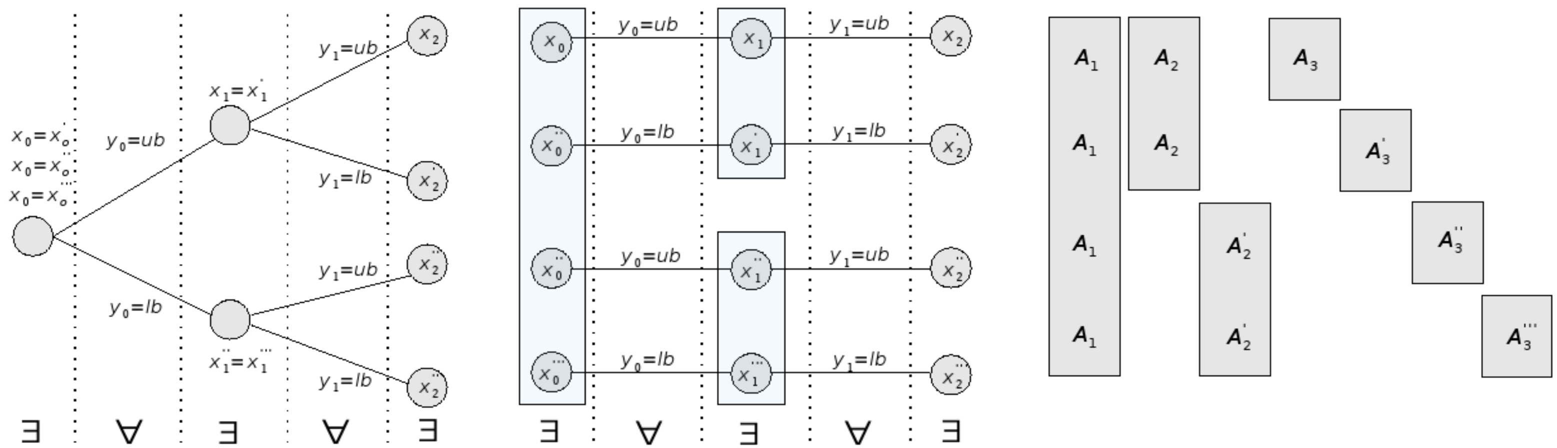




TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Formulierung des QLP als D.E.P:

- Entscheidungsbaum des ***Allspielers*** wird in D.E.P codiert



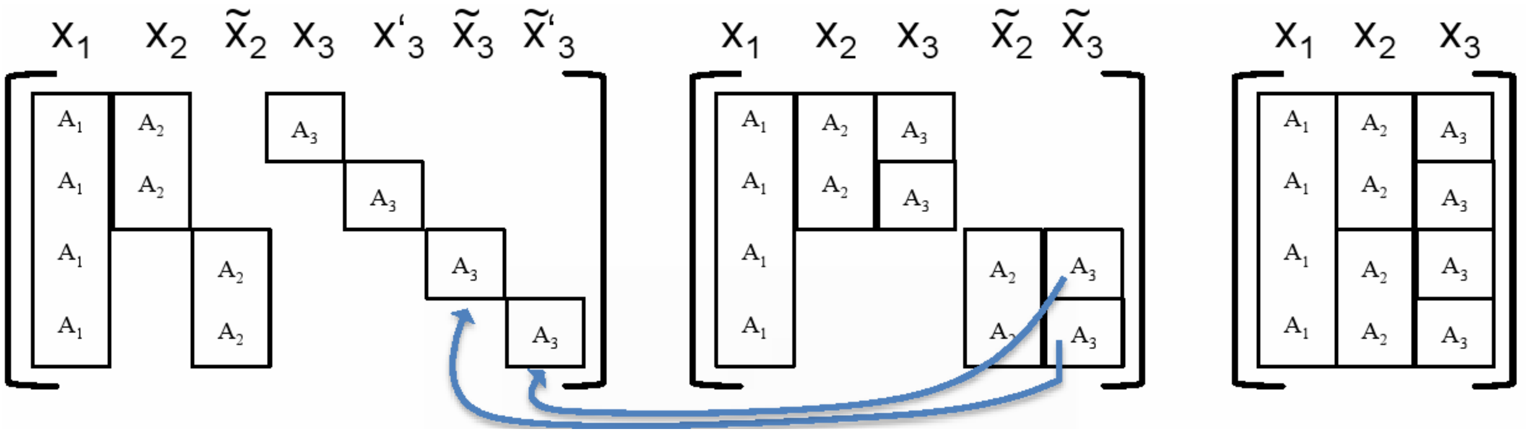
- $A_1, \ldots, A_t$ sind Variablenblöcke des Existenzspielers die von Spalten des Allspielers getrennt wurden

- Spalten des Allspielers werden mit den Werten des jeweiligen Szenarios auf die rechte Seite gebracht

DISCRETE OPTIMIZATION

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beispiel:



$Q = \exists\ \forall\ \exists\ \forall\ \exists$ $\qquad Q'' = \exists\ \forall\ \exists\ \exists\ \forall$ $\qquad Q' = \exists\ \exists\ \exists\ \forall\ \forall$

DISCRETE OPTIMIZATION

Definition. (Zeilenkomplexität, Facettenkomplexität)

Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ und seien und φ, ν ganzzahlig

1) P hat **Zeilenkomplexität (Facettenkomplexität)** von höchstens φ, wenn es ein Ungleichungssystem $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m$ gibt , so dass P durch eine Menge von Ungleichungen beschrieben werden kann und die Kodierungslänge jeder Zeile höchstens φ ist. Jeder Eintrag in A und b benötigt mindestens ein bit.

2) P hat **Eckenkomplexität** von höchstens ν, wenn es eine endliche Menge $V \in IR^n$ gibt, so dass $P = convexhull(V)$ und die Kodierungslänge für jeden Vektor V höchstens ν ist. Dabei: $\nu \geq n$.

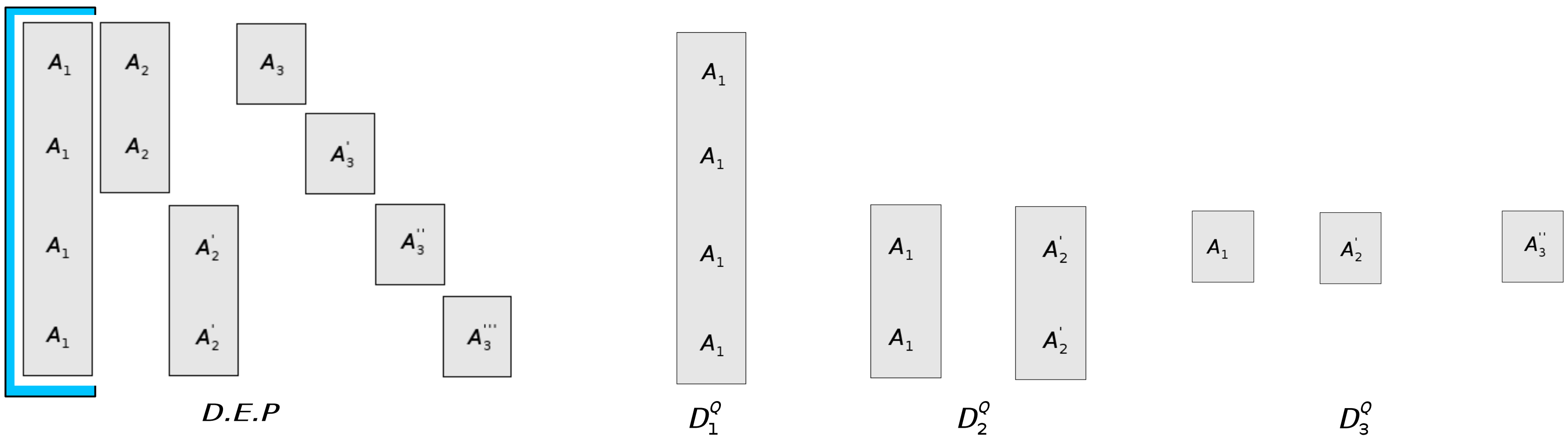
Lemma 3: $\nu \leq 4\varphi n^2$ und $\varphi \leq 3\nu n^2$ (klassisch, bekannt)

Polyedrische Eigenschaften von QLPs

Algorithmus: Berechnung einer QLP-Ecke

Algorithm 4 compute a QLP vertex, restricted to extreme universal choices

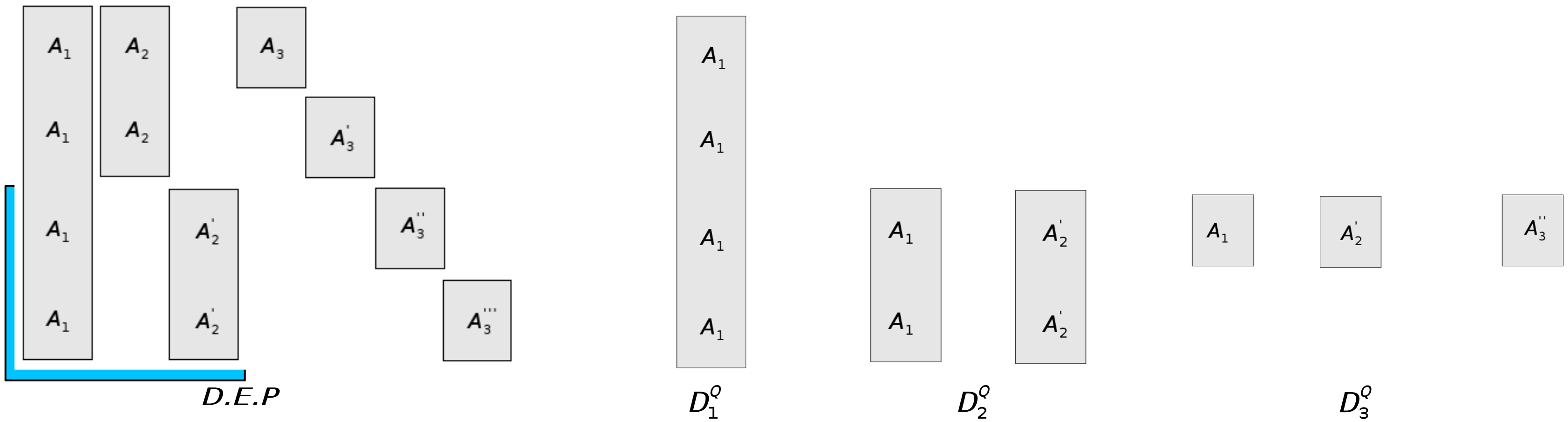
```
/* let t different blocks of existential variables in Q exist */
D^Q := set of inequalities of deterministic equivalent of QLP-instance Q
for i := 1 to t
    D_copy := D^Q
    if i < t then eliminate variables x_(i+1,1), ..., x_(i+1,k(i)), ..., x_(t,1), ..., x_(t,k(t))
    of the variable blocks i+1, ..., t in D_copy with the help of Fourier-Motzkin
    elimination (FME) and store the new inequalities in D_i^Q
    else store D^Q in D_i^Q
    choose the i^th move m_i of the universal player, i.e., delete those part of
    inequalities from D_i^Q, which do not belong to m_i
determine a vertex of D_1^Q ∪ ... ∪ D_t^Q
```



Algorithmus: Berechnung einer QLP-Ecke

Algorithm 4 compute a QLP vertex, restricted to extreme universal choices

/* let t different blocks of existential variables in Q exist */
D^Q := set of inequalities of deterministic equivalent of QLP-instance Q
for i := 1 **to** t
  $D_{copy} := D^Q$
  if $i < t$ **then** eliminate variables $x_{(i+1,1)}, \ldots, x_{(i+1,k(i))}, \ldots, x_{(t,1)}, \ldots, x_{(t,k(t))}$ of the variable blocks $i+1, \ldots, t$ in D_{copy} with the help of Fourier-Motzkin elimination (FME) and store the new inequalities in D_i^Q
  else store D^Q in D_i^Q
  choose the i^{th} move m_i of the universal player, i.e., delete those part of inequalities from D_i^Q, which do not belong to m_i
determine a vertex of $D_1^Q \cup \ldots \cup D_t^Q$



Polyedrische Eigenschaften von QLPs

Algorithmus: Berechnung einer QLP-Ecke

Algorithm 4 compute a QLP vertex, restricted to extreme universal choices

---

/* let t different blocks of existential variables in Q exist */

$D^Q :=$ set of inequalities of deterministic equivalent of QLP-instance Q

for i := 1 **to** t

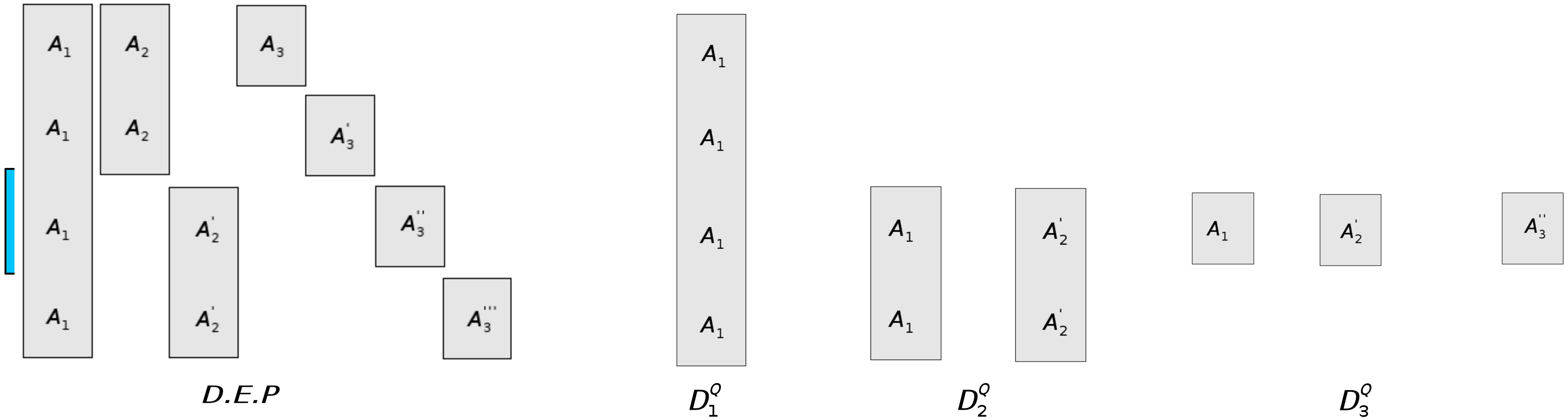
  $D_{copy} := D^Q$

  if $i < t$ **then** eliminate variables $x_{(i+1,1)}, \ldots, x_{(i+1,k(i))}, \ldots, x_{(t,1)}, \ldots, x_{(t,k(t))}$ of the variable blocks $i+1, \ldots, t$ in D_{copy} with the help of Fourier-Motzkin elimination (FME) and store the new inequalities in D_i^Q

  else store D^Q in D_i^Q

  choose the i^{th} move m_i of the universal player, i.e., delete those part of inequalities from D_i^Q, which do not belong to m_i

determine a vertex of $D_1^Q \cup \ldots \cup D_t^Q$



Polyedrische Eigenschaften von QLPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte QLP‘, ein QLP, bei dem die Allquantoren nach hinten gestellt wurden.
Das DEP dazu liefert eine Eckenkomplexität $v_{detEq'} = v_{QLP'} \leq 4\varphi n^2$

Dann:

Elimination in Zeile 4 hat keine Auswirkungen auf Eckenkomplexität

Komplexität des Systems und deshalb gilt für die D_i:

$$\varphi_{D_i} \leq 3 v_D n^2 \leq 3\left(4\varphi_D n^2\right) n^2$$

Löschen in Zeile 5 hat keine Auswirkungen auf Zeilenkomplexität

$$\varphi_{D_1 \cup \ldots \cup D_t} = 12\varphi_D n^4$$

Polyedrische Eigenschaften von QLPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lemma 4

Die Zeilen der D_i, die Ecken des modifizierten QLP-Polytop P([Q': Ax ≤ b]), $A \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ (das, bei dem die Allquantoren an den rechten Rand geschoben wurden), beschreiben, hat eine Zeilenkomplexität von $O(\varphi n^4)$, wobei φ die worst-case Zeilenkomplexität von (A,b) ist. Das gilt auch für Restsysteme nach FM-Eliminationen.

Idee:

- Sei $\varphi_{QLP'}$ die Zeilenkomplexität QLP QLP':= [Q' : Ax + By ≤ b]
- Die Anzahl der allquantifizierten Variablen sei k, also hat QLP' 2^k Szenarien
- Das D.E.P. von QLP' ist aus $\mathbb{R}^{n-k}$ und hat Zeilenkomplexität $\varphi := \varphi_{detEq'} \leq \varphi_{QLP'}$
- natürlich hat QLP' eine Eckenkomplexität, $\nu_{QLP'} \leq 4\varphi n^2$ wegen Lemma 5, und auf $O(\varphi n^4)$ für die D_i kommt man auch wie folgt:
  - Zeilenkomplexität von QLP' sei φ.
  - es ergibt sich eine Eckenkomplexität von $v=O(\varphi n^2)$
  - FM-Elimination einiger Variablen erhält die Eckenkomplexität im vorderen Teil
  - die Zeilenkomplexität des Restsystems ist $O(vn^2) = O(\varphi n^4)$

Lemma 5.

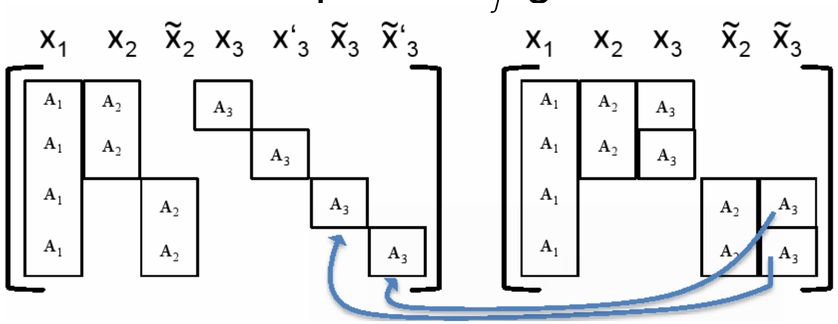
Das ursprüngliche QLP-Polytop $P([Q : Ax \le b])$ *hat eine Eckenkomplexität von* $O\left(\varphi_{QLP} n^6\right)$

Beweisidee:

- Gegeben zwei QLP Instanzen G und G'
- Instanzen identisch außer Quantifiziererstring

$$Q = \left(\ldots\forall_{j-1}\forall_j\exists_{j+1}\ldots\exists_n\right) \qquad Q' = \left(\ldots\forall_{j-1}\exists_{j+1}\ldots\exists_n\forall_j\right)$$

- Verschieben des Quantifizieres von Q' nach Q hat folgenden Effekt
  - Existenzspieler belegt $x_{j+1},\ldots,x_n$ **nachdem** Allspieler x_j gesetzt hat
  - Variablen $x_{j+1},\ldots,x_n$ werden in D.E.P von G repliziert
  - Dimension von D.E.P G wächst
  - Restriktionen werden partitioniert ($x_j=0$, $x_j=1$)



$Q = \exists\forall\exists\forall\exists$ $\qquad$ $Q' = \exists\forall\exists\exists\forall$

Polyedrische Eigenschaften von QLPs

- Jede neue Ungleichung (Zeile 4, Fourier-Motzkin) in D_i^G ist auch in $D_1^{G'} \cup \ldots \cup D_{t'}^{G'}$
- Es folgt $D_1^G \cup \ldots \cup D_t^G \subset D_1^{G'} \cup \ldots \cup D_{t'}^{G'}$
- Also: $\varphi_{D_1^G \cup \ldots \cup D_t^G} \leq \varphi_{D_1^{G'} \cup \ldots \cup D_t^{G'}}$
- Es folgt $\nu_{QLP} = O\left(\varphi_{D_1^G \cup \ldots \cup D_t^G} \, n^2\right) = O\left(\varphi_{D_1^{G'} \cup \ldots \cup D_t^{G'}} n^2\right) = O\left(\varphi_{QLP} n^6\right)$
- Es folgt Theorem 2.

  Jeder Eckpunkt des Lösungsraumes eines QLPs, bei dem der Allspieler zum Ausspielen von Extremen gezwungen wird, kann mit polynomiell vielen Bits beschrieben werden

- ***Top-down lässt sich eine Gewinnstrategie konstruieren, die nur wenige Bits pro Pfad benötigt.***
- ***Die Existenz reicht aus, um folgern zu können, das sie sich mit polynomiellem Platz finden lässt.***