Die natürlichen Zahlen

Das Problem

- Warum stimmen die Rechnungen?
- Aussagen über unendlich viele Zahlen?
- Was ist eine Zahl?

Nur Regeln

Peano Axiome

- 0
- Höchstens ein Vorgänger
- Induktion

Fragen

- Existenz, Eindeutigkeit, Unabhängigkeit, Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit

Vollständige Induktion

Zeige:

- A(0) ist wahr (Induktionsanfang).
- Falls A(n) wahr ist (Induktionsannahme),
  dann ist auch A(n+1) wahr (Induktionsschritt).

Dann ist A(n) wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsschluss).

Wegen Induktionsaxiom ($\mathbb{N}$3) ist das ein Beweis.

Rekursive Definition

Folge: Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$. Schreibe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $0! := 1$,
  $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=0} a_k := a_0$,
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} a_k := \sum_{k=0}^{k=n} a_k + a_{n+1}$.

Addition auf $\mathbb{N}$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

- $n + 0 := n$,
- $n + m' := (n+m)'$.

Ordnung auf den natürlichen Zahlen

Definition: $m \leq n$ falls $m + k = n$.

Satz: „$\leq$“ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$: Es gelten Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität.

Satz: Jede (nichtleere) Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ enthält ein kleinstes Element.

Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen

Satz: Die natürlichen Zahlen sind durch die Peano-Axiome bis auf Umbennung eindeutig bestimmt. (Was heißt das genau?)

Multiplikative Struktur von $\mathbb{N}$

$n \cdot 0 := 0$, $n \cdot m' := n \cdot m + n$.
Potenzen.

Satz: Jede Zahl ≥ 2 ist Produkt von Primzahlen.
Es gibt unendlich viele Primzahlen (Beweis!).

Kombinatorik und Binomialkoeffizienten

- n^k
- $n!$
- $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =: \binom{n}{k}$

Pascalsches Dreieck und Binomialkoeffizienten.

Satz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Weg zu den ganzen Zahlen

- Fortsetzung des Zahlenstrahls nach links?
- Schulden?
- Konstruktion aus den natürlichen Zahlen.

Äquivalenzrelationen

- Relation.
- Äquivalenzrelation: Reflexiv, symmetrisch, transitiv.

Satz (Äquivalenzrelation = Klasseneinteilung):

1. $(M_i)_{i \in I}$ Partition von M.
   $x \sim y$, falls x und y in derselben Teilmenge M_i liegen.
   Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.
2. Sei $R \subseteq M \times M$ Äquivalenzrelation auf M.
   Für $x \in M$ sei $[x] := \{y \in M : x \sim y\} \subseteq M$.
   Dann $\{[x] : x \in M\}$ Partition.

Ganze Zahlen

- $(n, m) \sim (\bar{n}, \bar{m}) :\Leftrightarrow n + \bar{m} = \bar{n} + m$ Äquivalenzrelation.
- $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{/\sim}$.
- Bild der Äquivalenzklassen.

Satz $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$: Die Abbildung

$$i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto i(n) := [(n, 0)]$$

ist injektiv und das Bild $i(\mathbb{N})$ ist eine Menge natürlicher Zahlen.

Satz (Addition auf $\mathbb{Z}$): Für $[(n, m)], [(l, k)] \in \mathbb{Z}$ hängt $[(n + l, m + k)]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

$$[(n, m)] + [(l, k)] := [(n + l, m + k)]$$

ist also *wohldefiniert* auf den Äquivalenzklassen und

- $i(n) + i(m) = i(n + m)$.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

Multiplikation auf $\mathbb{Z}$

Satz: Für $[(n, m)], [(l, k)] \in \mathbb{Z}$ hängt
$[(nl + mk, nk + ml)]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

$$[(nl + mk, nk + ml)]$$

ist also wohldefiniert auf den Äquivalenzklassen und erfüllt

$$i(n) \cdot i(m) = i(n \cdot m) \ .$$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

Es folgt $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Rationale Zahlen

Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ Äquivalenzrelation durch

$$(a, b) \sim (\bar{a}, \bar{b}) :\Leftrightarrow a \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot b \ .$$

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\})/_\sim \ .$$

Bild der Äquivalenzklassen.

Satz: $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : a \mapsto [(a, 1)]$ ist injektiv.
Schreibe $[(a, b)] =: \frac{a}{b}$. Erweitern und Kürzen = Wechseln zwischen Repräsentanten einer Äquivalenzklasse.

Satz:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$

sind wohldefiniert und setzen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ fort.

Körper

Definition: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *Körper*, falls

- $(\mathbb{K}, +)$ kommutative Gruppe.
- $(\mathbb{K}, \cdot)$ kommutative Halbgruppe mit neutralem Elt $1 \neq 0$, $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe.
- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist distributiv.

Rechnen in den Gruppen $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$.

Folgerungen aus dem Distributivgesetz:

(1) $x \cdot 0 = 0$.

(2) $x \cdot y = 0 \implies x = 0$ oder $y = 0$.

(3) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, insbes. $(-1) \cdot y = -y$.

(4) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Angeordnete Körper

Definition: $(\mathbb{K}, +, \cdot\ ;\ \mathbb{K}_+)$ *angeordneter Körper*, falls

- $0 \in \mathbb{K}_+$ und $0 \neq x \in \mathbb{K}$, dann
  entweder $x \in \mathbb{K}_+$ oder $-x \in \mathbb{K}_+$.
- $x, y \in \mathbb{K}_+ \ \Rightarrow\ x + y \in \mathbb{K}_+$ und $x \cdot y \in \mathbb{K}_+$.

Satz: Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot\ ;\ \mathbb{K}_+)$ angeordneter Körper, dann ist

$$x \leq y \ :\Leftrightarrow\ y - x \in \mathbb{K}_+$$

Ordnungsrelation auf $\mathbb{K}$.

$\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}_+ := \{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ ist angeordneter Körper.

Viele Ungleichungen

Angeordnete Körper enthalten $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$:

Definition: $J \subseteq \mathbb{K}$ heißt induktiv, falls

- $0 \in J$.
- $x \in J \Rightarrow x + 1 \in J$.

Satz: Sei $\bar{\mathbb{N}} := \bigcap\{J \subseteq \mathbb{K} : J \text{ induktiv }\}$ mit $f : \bar{\mathbb{N}} \ni \bar{n} \mapsto \bar{n} + 1 \in \bar{\mathbb{N}}$ als Nachfolgerabbildung ist ein System natürlicher Zahlen, d.h., erfüllt die Peano-Axiome.

Satz: Sei $\mathbb{K}$ angeordneter Körper. Dann

$$i : \mathbb{Z} \ni [(n, m)] \mapsto n - m \in \mathbb{K}$$

injektiver Ringhomomorphismus und

$$i : \mathbb{Q} \ni [(a, b)] \mapsto a \cdot b^{-1} \in \mathbb{K}, \;\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

injektiver Körperhomomorphismus.

Archimedisch geordnete Körper

Bernoulli-Ungleichung $\mathbb{K}$ angeordneter Körper, $x > -1, n \in \mathbb{N}$, dann

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \ .$$

Definition: $\mathbb{K}$ angeordneter Körper heißt *archimedisch geordnet*, falls

$$(AA) \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}, x > 0, \exists n \in \mathbb{N} : y < nx \ .$$

Dann gilt unter anderem:

(1) $\forall x \in \mathbb{K} \ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$.
(2) $\forall x \in \mathbb{K} \ \exists! n \in \mathbb{N} : x \leq n < n+1$.
(3) $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.
(4) $\forall b > 1 \forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : b^n > x$.

Satz (Dichtesatz): $\mathbb{K}$ archimedisch geordnet dann: Für $x, y \in \mathbb{K}$, $x < y$, existiert $q \in \mathbb{Q} : x < q < y$.

Supremum etc.

Motivation: $1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ \ldots$ lässt sich zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erweitern, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$:
$a_n \geq 0,\ a_n \leq a_{n+1},\ a_n^2 < 2 < (a_n + 10^{-n})^2$.

Satz: $\mathbb{K}$ archimedisch geordneter Körper, $a \in \mathbb{K}$ mit $a \geq 0$, $a^2 = 2$. Dann

- $a \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Ist $m \in \mathbb{K}$ mit $m \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, dann $m \geq a$.

Definition: $(\mathbb{K}, \leq)$ angeordneter Körper.

- Untere (obere) Schranke, nach unten (oben) beschränkt.
- Maximum (Minimum).
- Supremum (Infimum).

Beobachtung: In $\mathbb{Q}$ besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein Supremum!

Reelle Zahlen

Definition: Ein archimedisch angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt ein *Körper reeller Zahlen*, falls gilt:

> *Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{K}$ nach oben beschränkt, dann besitzt M ein Supremum in $\mathbb{K}$.*

$a \in \mathbb{K} \implies a = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q \leq \mathbb{K}\}$.

Satz: Es gibt nur einen Körper reeller Zahlen.

Intervalle

Eigenschaften von $\mathbb{R}$

Satz: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $J_n = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; J_{n+1} \subseteq J_n \; .$$

(1) Dann $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

(2) Falls sogar $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$, dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \{c\} \; .$$

Satz: Sei $0 \neq n \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq a \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Zahl $0 \leq x \in \mathbb{R}$ mit

$$x^n = a \; .$$

Komplexe Zahlen

- $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird zu einem Körper.
- Sei $i := (0, 1)$, dann $i^2 = -1$.
- Schreibe komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ als $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
- Komplexe Konjugation, Realteil, Imaginärteil.
- Multiplikation auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ durch $T_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
- Rechnen, insbes. „Reell Machen“ von Nennern.

Polardarstellung: $z = |z|\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$.

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multiplizert und ihre Argumente addiert.

n-te Wurzeln in $\mathbb{C}$:

$z^n = a$ hat n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$. Geometrie!

Mit $\mathbb{C}$ ist Schluss.

- Veranschaulichung von Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Betrag

.

Definition: $\mathbb{K}$ Körper, $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ Betrag, falls

(B1) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(B2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, insbes. $|-x| = |x|$.

(B3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

Satz

- Auf $\mathbb{R}$ efüllt der Betrag (B1), (B2), (B3).
- Auf $\mathbb{C}$ erfüllt der Betrag

$$\mathbb{C} \ni z = a + ib \mapsto |z| := \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(B1), (B2), (B3).

Interpretation: Abstand zum Nullpunkt.

Norm und Metrik

Definition: Sei V $\mathbb{K}-V.R.$,
$||\cdot|| : V \to \mathbb{R} : x \mapsto ||x||$ heißt Norm, falls

(N1) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ (Homogenität).

(N3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungleichung).

Definition: M Menge.
$d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls

(M1) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie).

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
(Dreiecksungleichung).

Bem. $|y-x|$, bzw. $||\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}||$, setzt Betrag, bzw. Norm, zu verschiebungsinvarianter Metrik auf $\mathbb{K}$, bzw. V, fort.

Euklidische Norm

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, dann *Skalarprodukt* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$.

Satz Sei $||\vec{x}|| := ||\vec{x}||_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$. Dann:

- *Ungleichung von Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \ .$$

- $\vec{x} \mapsto ||\vec{x}||$ ist Norm auf $\mathbb{K}^n$.
- $||\vec{x}|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \cdot ||\vec{x}||$.

Prop: *Dreiecksungleichung nach unten:*
(M, d) metrischer Raum, $x, y, z \in M$, dann

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \ .$$

Insbes. $$\big| \|x\| - \|z\| \big| \ \leq \ \|x - z\|.$$

Folgen

$$a_n := \frac{1}{n}, \quad n \neq 0$$
$$b_n := 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \neq 0$$
$$c_n := (-1)^n$$
$$d_n := \begin{cases} -1, & n = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$e_n := \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$f_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \neq 0$$
$$g_n := \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n = (-1)^n f_n, \quad n \neq 0$$
$$h_n := \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ \frac{1}{n} & \text{sonst}, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Konvergenz

Definition: Sei $(a_n)_n$ Folge, a Element in $\mathbb{K}$, in normiertem Raum $(E, \|\cdot\|)$, in metrischem Raum (M, d).
Die Folge $(a_n)_n$ heißt *konvergent* gegen a, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \begin{cases} |a - a_n| < \varepsilon & \text{in } \mathbb{K} \\ \|a - a_n\| < \varepsilon & \text{in } (E, \|\cdot\|) \\ d(a, a_n) < \varepsilon & \text{in } (M, d) \end{cases}$$

Schreibe $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.
a heißt der *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_n$.
Besitzt die Folge keinen Grenzwert, so heißt sie *divergent*.

Diskussion

- n_0 hängt von ε ab.
- Genausogut kann man fordern:
  $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0 : |a - a_n| \leq \varepsilon$
  $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0 : |a - a_n| < \frac{1}{k}$
- In jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder.
- Konvergenzverhalten ändert sich nicht durch Abänderung endlich viele Folgenglieder.
- Veranschaulichungen.
- Fehlvorstellungen.

Konvergenz in metrischen Räumen

Proposition. Sei (M, d) metrischer Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M, $a \in M$.

i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

ii) $d(a_n, a) \leq c_n$ wo $\lim_n c_n = 0$, dann $\lim_n a_n = a$.

iii) $\lim_n a_n = a$, dann für $b \in M$: $\lim_n d(a_n, b) = d(a, b)$.
Insbesondere gilt in einem normierten Raum:
$\lim_n ||a_n|| = ||a||$.

Konvergenz in normierten Räumen

Sei $(E, ||\cdot||)$ normierter Raum.

- Konvergente Folgen sind beschränkt.
- Konvergente Folgen sind ein Vektorraum und der Limes ist linear.
- Beschränkte Folge mal skalare Nullfolge ist Nullfolge.

Konvergenz in $\mathbb{K}^d$

Konvergenz in $\mathbb{K}^d$ ist äquivalent zur koordinatenweisen Konvergenz.

Konvergenz in Körpern

- Konvergente Folgen kann man multiplizieren und vorsichtig dividieren.
- Konvergente Folgen sind eine $\mathbb{K}-$Algebra und der Limes ist Algebra-Homomorphismus.
- $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Konvergenz und Ordnung in $\mathbb{R}$

Satz

- Der Limes ist monoton.
- Sandwich-Theorem.

Rechnen mit Unendlich und bestimmte Divergenz.

Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwertes?

Satz. Eine monotone beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert (denn in $\mathbb{R}$ existiert ein Supremum).

Frage. Und wenn die Folge nicht monoton ist?

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$\sigma_k := sup\{a_n : n \geq k\}$ $\qquad \limsup_n a_n := \lim_k \sigma_k$

$i_k := inf\{a_n : n \geq k\}$ $\qquad \liminf_n a_n := \lim_k i_k$

Proposition. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$.

Teilfolgen und Häufungspunkte

Frage. Und wenn $\liminf_n a_n \neq \limsup_n a_n$?

Definition. Teilfolge.

Proposition. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_k a_{n_k} = \limsup_n a_n$. Analog für $\liminf_n a_n$.

Frage. Wohin konvergieren Teilfolgen, wenn sie konvergieren?

Proposition. Sei (M, d) metrischer Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$, $a \in M$. Dann sind äquivalent:

(a) Es gibt eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

(b) In jeder ε-Umgebung von a liegen unendliche viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition. Häufungspunkt.

Häufungspunkte und Bolzano-Weierstraß

Proposition. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge, dann ist $\limsup a_n$ der größte, $\liminf_n a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge.

Satz von Bolzano-Weierstraß. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ besitzt einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge.

Der Satz gilt nicht in $\mathbb{Q}$!

Cauchy-Folgen

Definition. Sei (M, d) metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 : \begin{cases} |a_n - a_m| < \varepsilon & \text{in } \mathbb{K} \\ \|a_n - a_m\| < \varepsilon & \text{in } (E, \|\cdot\|) \\ d(a_n, a_m) < \varepsilon & \text{in } (M, d) \end{cases} .$$

„Verdichtungsprinzip".

Satz.

- Eine konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.
- Hat eine Cauchyfolge einen Häufungspunkt, so ist dieser ihr Limes.

Anschauung. Eine Cauchyfolge konvergiert, wenn der Raum an der Verdichtungsstelle kein Loch hat.

Vollständigkeit

Definition. Ein metrischer Raum (M, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge *in M* konvergiert.
Ist ein normierter Raum vollständig, so heißt er *Banachraum*.

$\mathbb{Q}$ ist also nicht vollständig.

Satz. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind vollständig!

Satz. Für einen archimedisch geordneten Körper $\mathbb{K}$ sind äquivalent:

(a) Ist $A \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt, so existiert $\sup A$ in $\mathbb{K}$.
(b) Jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ konvergiert.
(c) Jede Cauchyfolge rationaler Zahlen in $\mathbb{K}$ konvergiert.

In diesen Fällen ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Konstruktion von $\mathbb{R}$:

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$.
Zwei Cauchyfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}$ heißen äquivalent, falls ihre Differenz eine Nullfolge ist.

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/_\sim$$

(i) $\mathbb{R}$ ist Körper.

(ii) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

(iii) Sei $\mathbb{R}_+ := \{[q_0.q_1, q_2, \ldots] \in \mathbb{R} : q_n \geq 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$, dann $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ archimedisch geordnet.

(vi) Jede Cauchyfolge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$.

Reihen

Rahmen: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, E Banachraum.

Reihen = Folgen. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ steht für

i) Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$,
ii) $\lim_n s_n$, falls existiert.

Die wichtigsten Reihen:

i) Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.
ii) Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Reihen = Folgen. Also:

- Konvergente Reihen addieren und mit Skalar multiplizieren.
- Cauchy-Kriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$
  $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 : \forall n, m > n_0 :$

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Umordnung von Reihen

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen.

- Unendliches Assoziativgesetz ergibt manchmal Unsinn.
- Unendliches Kommutativgesetz gilt nicht immer.

Riemannscher Umordnungssatz:
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ reelle konvergente Reihe.
Falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergent, lässt sich durch Umordnung eine beliebiger Wert erzeugen.

Ausweg?
Definition. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Absolut konvergente Reihen

Majorantenkriterium: $|a_n| \leq c_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.
Insbesondere sind absolut konvergente Reihen konvergent.

Satz: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ändert sich bei Umordnung der Grenzwert der Summe nicht.

Satz. Sei $(a_n)_n$ eine Reihe in E.

- Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, oder
- Falls $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$,

dann ist die Reihe absolut konvergent.

Bemerkungen.

- Beide Kriterien sind hinreichend aber nicht notwendig.
- Genaue Formulierung ist wichtig.

Produkt von Reihen

Satz. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$ mit Grenzwerten A und B.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ eine Reihe, in der jeder der

$$\text{Summanden} \qquad \begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

genau einmal vorkommt. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ absolut konvergent und ihr Wert ist $A \cdot B$.

Cauchy-Produkt von Reihen

Satz (Cauchyprodukt): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, dann
$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$
mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$.

Satz: $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Dann gilt:
$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Offene Mengen

Definition. $A \subseteq (M, d)$ heißt offen (in M), falls gilt:

$$\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subseteq A \ .$$

- $K_r(x)$ ist offen.
- Ob eine Menge A offen ist, hängt auch von M ab. ($\mathbb{R}$ nicht offen in $\mathbb{R}^2$).

Satz: Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.

Offene Umgebung von a, Umgebung von a.

Abgeschlossene Mengen

Satz. Für $A \subseteq M$ sind äquivalent:

a) Für jede Folge $(x_n)_n \subseteq A$ gilt:
Ist $\lim_n x_n = a \in M$, dann ist $a \in A$.

b) Das Komplement $A^{\complement}$ ist offen in M.

In diesem Fall heißt A abgeschlossen.

Satz: Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beispiel:

- Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen
- Abschluss einer Menge
- $\emptyset$ und M sind abgeschlossen (und offen).

Hauptsatz über Stetigkei:

Sei $f : M \supseteq D \to N$, $a \in M$. Dann sind äquivalent:

a) Für jede Folge $(x_n)_n \subseteq D$ mit $\lim_n x_n = a \in D$ gilt $\lim_n f(x_n) = f(a) = f(\lim_n x_n)$.

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D$:

$$f\big(K_\delta(a)\big) \subseteq K_\varepsilon(f(a))$$

.

c) Ist $V \subseteq N$ offene Umgebung von $f(a)$, dann gibt es eine in D offene Umgebung U von a mit $f(U) \subseteq V$.

In diesem Fall heißt f stetig in a.

Globale Stetigkeit

Korollar. Für $f : M \supseteq D \to N$ sind äquivalent:

a) f ist (global) stetig auf D.

b) Das Urbild jeder offenen Menge in N ist offen in D.

Beispiele.

- Konstante Funktion, identische Funktion sind stetig.
- Heaviside-Funktion und Dirichletfunktion.
- Funktionen auf $\mathbb{Z}$.

Rechenregeln für Stetigkeit

Satz. Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

Satz. Seien $f, g : M \supseteq D \to N$ stetig in $a \in D$. Dann gilt:

- N normiert, dann $f + g$, λf, $||f||$ stetig in a.
- $N = \mathbb{K}^n$, dann f stetig in a genau dann wenn alle Koordinaten von f stetig sind.
- $N = \mathbb{K}$, dann $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (wo es geht) stetig in a.

Insbesondere sind auf ganz $\mathbb{C}$ Polynome und (wo es geht) rationale Funktionen (Quotient von Polynomen) stetig.

Zwischenwertsatz

Satz. Ist $f : \mathbb{R} \ni [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f auch jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens einmal an. Ist insbesondere $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann existiert $c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$.

- Beweis mit Intervallschachtelung gibt konstruktives Verfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen (wenn auch nicht sehr effizient).
- Der Satz gilt nur, weil $\mathbb{R}$ vollständig ist. In $\mathbb{Q}$ ist der Satz falsch.
- Der Satz ergibt neuen einfachen Beweis für die Existenz der k-ten Wurzel.

Satz über die Umkehrfunktion.

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \ni [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
Dann ist $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b] : f(x) \to x$ ist streng monoton wachsend und stetig. Analog für streng monoton fallend.

Beispiel. Die Funktion $[0, \infty[\ni x \mapsto \sqrt[k]{x} \in [0, \infty[$ ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^k$, also streng monoton wachsend, bijektiv und stetig.

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$.