

## Mathematik für MB

### 13. Übung

#### Präsenzaufgaben

##### P43 Differenziation der Umkehrfunktion

- i) Berechnen Sie die erste Ableitung von

$$f(x) = \arctan x .$$

- ii) Es sei die folgende Funktion gegeben

$$f(x) = x + e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  im Punkt  $y_0 = 1$ .

##### P44 Mittelwertsatz

- i) Bestimmen Sie für die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^x$  die Tangentengleichung an der Stelle  $x_0 = 0$ .
- ii) Formulieren Sie den Mittelwertsatz für die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .
- iii) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Ungleichung

$$1 + x \leq e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0} .$$

##### P45 Komplexe Zahlen I

Es seien  $z = 1 + 2i$  und  $w = 3 - i$  gegeben.

- i) Skizzieren Sie  $z$  und  $w$  in der komplexen Zahlenebene.
- ii) Berechnen Sie  $z + w$ ,  $z \cdot w$ ,  $\frac{z}{w}$  sowie  $|z|$ ,  $|w|$  und  $\arg z$ ,  $\arg w$ .
- iii) Stellen Sie  $z$  und  $w$  in der Form  $z = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$  bzw.  $w = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$  dar.

##### P46 Komplexe Zahlen II

- i) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene jeweils alle Punkte  $z \in \mathbb{C}$ , die den folgenden Bedingungen genügen:

$$|z| \leq 1, \quad |z| > 2, \quad 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1, \quad |z+1-i| \leq 2, \quad |z+1| = |z-1|, \quad |1+z| < |i+z| .$$

ii) Beschreiben Sie für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}$  die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \overline{(z - z_0)}(z - z_0) = r^2\}$  geometrisch.

iii) Zeigen Sie, dass jeder Kreis in der komplexen Ebene in der Form

$$\bar{z}z - \bar{a}z - a\bar{z} + b = 0$$

für  $b \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{C}$  geschrieben werden kann.

iv) Betrachten Sie das durch die Geraden  $x + d = 0$ ,  $d \in \mathbb{N}$  und  $y + id = 0$ ,  $d \in \mathbb{N}$  gegebene Gitter in der komplexen Ebene. Zeigen Sie, dass die Gitterlinien mit  $d \neq 0$  durch die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$$

auf Kreise abgebildet werden.

