Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 30.01 – 04.02.09

Mathematik I für MB

12. Übung

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe W14 (Technik des Differenzierens) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

(i) $f_1(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^{28} - 2x^3 + x, \quad f_3(x) = x^3 \cdot x^3 + 2x^2 - 7x - 2,$

(ii) $f_1(x) = (x^2 - 1)(x^{13} + x^7 - 3x + 1), \quad f_2(x) = (1 + 3x^2 - 7x)(4 + x)(7 - x^2),$

(iii) $f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}, \quad f_2(x) = \frac{7x^2+2x}{27x^3-3}, \quad f_3(x) = \frac{4x^3+3x^2-x}{7x^2+x+3},$

(iv) $f_1(x) = \sqrt{x+1}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}, \quad f_3(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^7-1}}, \quad f_4(x) = \frac{5}{x^3} - 4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-2x}},$

(v) $f_1(x) = 4x^3 - 2x^{-1/3}, \quad f_2(x) = 7x^{3/28} - \frac{7}{x^{4/3}}, \quad f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^{27}} - 3x^{\frac{3}{7}-1},$

(vi) $f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \sinh x, \quad f_4(x) = \cosh x,$

(vii) $f_1(x) = \tan x, \quad f_2(x) = \cot x, \quad f_3(x) = \tanh x, \quad f_4(x) = \coth x,$

(viii) $f_1(x) = (x^4 + 4x)\sin x, \quad f_2(x) = \frac{x^2-\sin x}{2+\sin x}, \quad f_3(x) = (2x^3 - 3x + 4\sin x)^7,$ $f_4(x) = \sin^4(x^4 + 3x^2 - 8),$

(ix) $f_1(x) = \sin(\cos x), \quad f_2(x) = \cos(\sin(\cos(2x))), \quad f_3(x) = \sin(\cos(\tan\sqrt{x^2+1})),$

(x) $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{x^2-1}, \quad f_3(x) = \sin(e^{x^3-4x+2}), \quad f_4(x) = \cos(e^{\frac{x+1}{x-1}}),$

(xi) $f_1(x) = \ln x, \quad f_2(x) = \ln|x|, \quad f_3(x) = \ln(x^2 + x - 1), \quad f_4(x) = \sin(\ln\sqrt{x^2+1}).$

Präsenzübungen

Aufgabe P38 Welche der folgenden Funktionen sind stetig? Begründen Sie Ihre Entscheidung:

(i) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := \frac{1}{x^3},$

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) := \frac{1}{x^2-3x+2},$

(iii) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) := \frac{x}{|x|},$

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) := \frac{\sin x}{\cos x},$

(v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) := \tan(\sin x).$

Aufgabe P39 (Stetige Ergänzung) Können Sie jeweils $f(0)$ derart definieren, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist? Weisen Sie nach, dass f mit Ihrer Wahl stetig ist, bzw. zeigen Sie, dass es keine Möglichkeit gibt $f(0)$ entsprechend zu wählen.

(i) $f(x) = 1$ für alle $x \neq 0$.

(ii) $f(x) = 1$ für alle $x > 0$ und $f(x) = -1$ für alle $x < 0$.

(iii) $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$.

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe P40 Betrachten Sie die Funktionsgraphen in Abbildung 1. Jeder Graph in der unteren Zeile ist stellt die Ableitung einer Funktion mit Graphen in der oberen Zeile dar. Ordnen Sie jeder Funktion ihrer Ableitung zu.

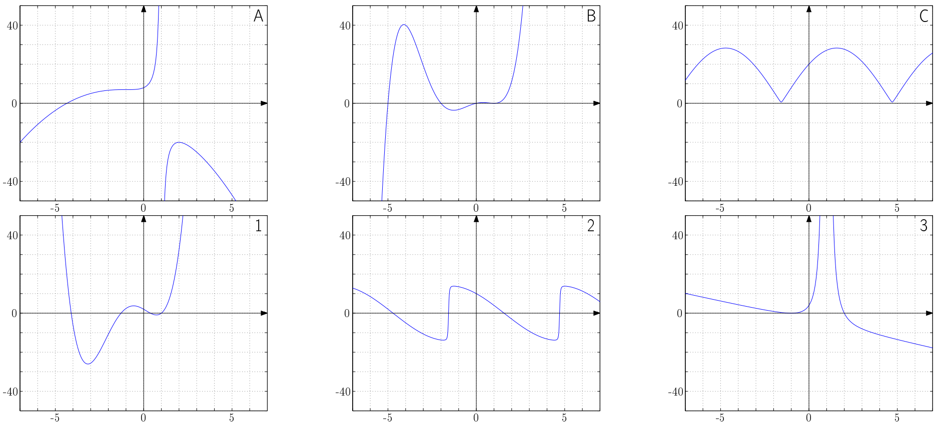

Abbildung 1:

Aufgabe P41 (Differenzenquotient) Testen Sie von folgenden Funktionen, ob sie differenzierbar im Punkt x_0 sind und bestimmen Sie ggf. die Ableitung, indem sie den Differenzenquotienten auswerten:

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ in $x_0 = 1$. (b) $f(x) = \sqrt{x}$ in $x_0 = 1$, (c) $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$,

Aufgabe P42 (Regel von l'Hospital) Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Nutzen Sie die Regel von l'Hospital, wo es möglich ist.

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{e^x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$,

(iii) $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x$, $\lim_{x\to 0} x^x$, $\lim_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x})^{3x}$.

Hinweis: $a^b = e^{b\cdot\ln a}$

Hausübungen

Aufgabe H37 (2 Punkte) Bestimmen sie ein kubisches Polynom $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ derart, dass die folgende Funktion einmal stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x < 0, \\ p(x) & \text{, für } x \in [0,1], \\ 1 & \text{, für } x > 1. \end{cases}$$

Aufgabe H38 (Regel von l'Hospital) (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\sinh^2 x}, \qquad \lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} (\tfrac{1}{x})^{\tan x}.$$

Aufgabe H39 (2+2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)$$

für alle $x \neq 0$.

(i) Definieren Sie $f(0)$ derart, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(ii) Ist die von Ihnen definierte stetige Ergänzung differenzierbar?