Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 23. – 28.01.09

Mathematik I für MB

11. Übung

Präsenzaufgaben

Aufgabe P34 (Eigenschaften von Funktionen)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1-x}{3+x}.$$

(i) Geben Sie die Nullstelle von f an.

(ii) Geben Sie das maximale Definitionsgebiet von f und die zugehörige Bildmenge B_f an.

(iii) Untersuchen Sie f in den Intervallen $(-\infty, -3)$ und $(-3, \infty)$ auf Monotonie.

(iv) Skizzieren Sie den Graph von f.

Aufgabe P35 (Verkettung von Funktionen) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin(x + \pi/4), \quad h(x) = e^{-x^2},$$

mit den Definitionsbereichen $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D_g = D_h = \mathbb{R}$.

(i) Skizzieren Sie die Graphen der drei Funktionen.

(ii) Bestimmen Sie die Bildmengen B_f, B_g und B_h.

(iii) Bilden Sie alle möglichen Verkettungen von je zwei dieser Funktionen (auch mit sich selbst, falls möglich).

(iv) Was können Sie zum asymptotischen Verhalten $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ von f, g, h sowie ihren Verkettungen aussagen?

Aufgabe P36 (Umkehrfunktionen und Verkettungen) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{mit } D_f = D_g = [0, +\infty).$$

(i) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

(ii) Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und Injektivität. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen. Skizzieren Sie auch diese.

(iii) Bilden Sie die Verkettung $h = f \circ g$. Untersuchen Sie auch diese auf strenge Monotonie und bilden Sie auf direktem Wege ihre Umkehrfunktion.

(iv) Verifizieren Sie Ihr Resultat mit der aus der Vorlesung bekannten Identität $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Aufgabe P37 (Grenzwerte) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Grenzwerte. Fertigen Sie eine Skizze an.

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Hausaufgaben

Aufgabe H33 (Potenzreihen) (2+2 Punkte)
Betrachten Sie die durch

$$a_n = \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} x^n$$

gegebene Folge $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$.

(i) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die zugehörige Reihe konvergiert.

(ii) Welche Funktion stellt diese Reihe dar?

Aufgabe H34 (Vordiplom; 30 Minuten) (6 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen

$$p(x) = e^x, \quad q(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \quad \text{mit } D_p = \mathbb{R}, D_q = [1, \infty).$$

(i) Skizzieren Sie die Graphen von p und q.

(ii) Bestimmen Sie die Bilder von B_p und B_q.

(iii) Zeigen Sie: q ist streng monoton wachsend.

(iv) Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen p^{-1} und q^{-1} und skizzieren Sie diese.

(v) Stellen Sie die Funktion

$$r(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

mit Hilfe einer Verkettung der Funktionen p und q dar.

(vi) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion dieser Verkettung und skizzieren Sie diese.

Aufgabe H35 (2+2 Punkte) Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wie übertragen sich die Eigenschaften von f und g auf deren Verkettung $f \circ g$? Vervollständigen Sie die folgenden Tabellen.

g f	monoton wachsend	monoton fallend
monoton wachsend		
monoton fallend		

Beispiel: Tragen Sie links oben in der Tabelle ein, ob $f \circ g$ monoton wachsend oder fallend ist, falls f und g monoton wachsend sind. Verfahren Sie analog mit den anderen Feldern und der folgenden Tabelle.

g f	gerade	ungerade
gerade		
ungerade		

Aufgabe H36 (2 Punkte) Zeigen Sie: Jede Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als

$$f(x) = g(x) + u(x),$$

wobei g eine gerade Funktion und u eine ungerade Funktion ist.

Beispiel: $f(x) = e^x$ ist weder gerade noch ungerade aber $g(x) = \cosh(x)$ ist gerade, $u(x) = \sinh(x)$ ist ungerade und es gilt $f(x) = \cosh(x) + \sinh(x)$.