Prof. U. Reif
S. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS08/09
16.01.2008

Mathematik für MB

10. Übung

Präsenzaufgaben

P29 Verständis

Der Wert $\ln 2$ kann mittels der Reihe

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

entwickelt werden.

i) Geben Sie die ersten fünf Folgeglieder und Partialsummen explizit an.
ii) Was bedeutet die obige symbolische Schreibweise?

P30 Leibnizsches Konvergenzkriterium

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ vermittels

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad b_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

i) Berechnen Sie jeweils die ersten vier Partialsummen.
ii) Überprüfen Sie die zugehörigen Folgen der Partialsummen auf Konvergenz.

P31 Quotientenkriterium

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gemäß

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad b_n = \frac{n!}{n^n} 2^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Untersuchen Sie die zugehörigen Reihen auf Konvergenz.

P32 Wurzelkriterium

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gemäß

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Untersuchen Sie die zugehörigen Reihen auf Konvergenz.

P33 Vergleichskriterium

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^3+3)}{2k^3+2k+1} \qquad \text{ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^k}{k2^k+k^3}\,.$$

*H*inweis: Wenden Sie das Vergleichskriterium an. Versuchen Sie es im Fall i) mit $b_k = \frac{1}{2k^3}$.

Hausaufgaben

H29 Teleskop-Reihe — 0+2+2 Punkte

Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ gemäß

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

i) Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen $s_1, \ldots, s_5$ zu dieser Folge. Welche explizite Darstellung für die s_m vermuten Sie?

ii) Ermitteln Sie nun mit Hilfe der Zerlegung

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

eine explizite Darstellung für s_m.

iii) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} s_m$.

H30 Quotienten- und Wurzelkriterium — 4 Punkte

Untersuchen Sie die zu

$$a_n = \frac{(n+1)n^2}{n^{n^2}2^n}, \quad b_n = (-1)^n \left(\frac{4}{n}\right)^n, \quad c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad d_n = \frac{n!}{2^n(2n)!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

gehörigen Reihen auf Konvergenz.

H31 Konvergenz von Reihen - Diplomvorprüfung 2004; 20min — 2+2 Punkte

i) Untersuchen Sie die zu $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gehörigen Reihen auf Konvergenz.

$$a_n = n \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^n, \qquad b_n = \frac{n-5}{n^3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ii) Berechnen Sie die Reihensumme der zu

$$a_n = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

gehörigen Folge von Partialsummen.

H32 Vergleichskriterium — 4 Punkte

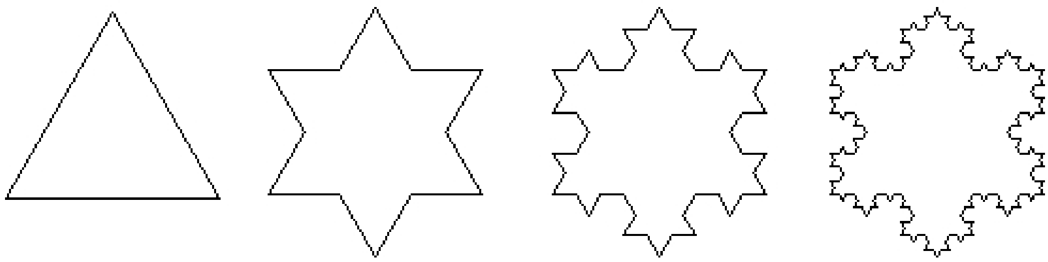
Die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \qquad (q > 0)$$

sind entweder beide konvergent oder beide divergent. Begründen Sie dies mit dem Vergleichskriterium.

Freiwillige Zusatzaufgaben

Z01 Die Kochsche Schneeflocke



Es bezeichne K_1 ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen 1. Wir unterteilen nun jede dieser drei Seiten in drei gleiche Segmente und ersetzen alle Mittelsegmente jeweils durch zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks. Wir erhalten so die neue Kurve K_2. Wenden wir diese Konstruktionsvorschrift auf K_2 an, so erhalten wir die Kurve K_3 usw.

i) Berechnen Sie den Umfang U_n der Figur K_n sowie ihren Flächeninhalt A_n.
Hinweis für den Flächeninhalt: Berechnen Sie zunächst

$$\begin{aligned}&A_1, \quad \text{dann } A_2 = A_1 + \text{Zuwachs}\\ &\text{dann } A_3 = A_1 + \text{erster Zuwachs} + \text{zweiter Zuwachs usw.}\end{aligned}$$

Lesen Sie daraus eine explizite Darstellung von A_n in Form einer geometrischen Reihe ab.

ii) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} U_n$ und $\lim_{n\to\infty} A_n$.

iii) Generieren Sie die Kurven K_1 bis K_{10} unbedingt mittels eines Computerprogramms.

Z02 Umordnen von Reihen

Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ gemäß

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad n = 1, 2 \ldots$$

i) Berechnen Sie die ersten fünf Partialsummen $s_1, \ldots, s_5$ zu dieser Folge.

ii) Begründen Sie, dass die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen gegen einen Grenzwert $s < \infty$ konvergiert.

iii) Durch Multiplikation von $(a_n)_n$ mit $\frac{1}{2}$ erhalten wir eine neue Folge $(a_n^*)_n$. Berechnen Sie den Grenzwert s^* der zu dieser neuen Folge gehörenden Partialsummen.

iii) Addieren Sie nun gliedweise beide Folgen zu $b_n = a_n + a_n^*$. Welchen Grenzwert t besitzt die Folge der zu $(b_n)_n$ gehörenden Partialsummen?

iv) Machen Sie deutlich, dass $(b_n)_n$ durch eine Umordnung der ursprünglichen Folge $(a_n)_n$ entsteht. Warum sind dann aber die Grenzwerte s und t verschieden?