Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 19.12 – 14.01.09

Mathematik I für MB

9. Übung

Präsenzaufgaben

Aufgabe P25 Zeigen Sie ausführlich, dass die durch

$$a_n := \frac{n}{2n+1}$$

gegebenen Folge $(a_n)_n$ den Grenzwert $a = 1/2$ besitzt, d.h. weisen Sie anhand der Definition nach, dass $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist. Geben Sie insbesondere für jedes $\varepsilon > 0$ ein entsprechendes n_0 an.

Aufgabe P26 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen jeweils auf Konvergenz und berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

(i) $a_n := 2n - 1, \quad b_n := \frac{3n^2+7}{13n}, \quad c_n := \frac{2n^2+2n+4}{4n^2+3}, \quad d_n := (1 + 1/n)^{1000}.$

(ii) $a_n := 2^n, \quad b_n := \frac{1}{3^n}, \quad c_n := \frac{3^n+1}{3^{2n}-1}.$

(iii) $a_n := \sqrt{n}, \quad b_n := \frac{2}{\sqrt{4n}}, \quad c_n := \sqrt[n]{23}.$

Aufgabe P27 Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge $(a_n)_n$ mit den entsprechenden Eigenschaften an:

(i) Die Folge ist monoton steigend und besitzt den Grenzwert 1.

(ii) Die Folge ist monoton fallend, es gilt $1 < a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sie besitzt den Grenzwert 1.

(iii) Die Folge ist alternierend, beschränkt und divergent.

(iv) Die Folge ist alternierend und konvergent.

Aufgabe P28 Untersuchen Sie nachstende Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} c_n$:

$$a_n := \sqrt{2n^2+7} - n\ , \qquad b_n := \sqrt{n(n-1)} - n\ , \qquad c_n := \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{2n}\ .$$

Hausaufgaben

Aufgabe H25 (4 Punkte) Zeigen Sie ausführlich (wie in Aufgabe P25), dass die durch

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

gegebene Folge $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe H26 (2 Punkte) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$:

$$a_n := \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\ , \qquad\qquad b_n := \frac{5n^3 - 3n^2 + 1}{(2n+1)^3} \cdot \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n\ .$$

Aufgabe H27 (2 Punkte) Untersuchen Sie die nachstehende Folge $(a_n)_n$ auf Monotonie und Konvergenz:

$$a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ .$$

Hinweis: Wie kann man die Summe $1+2+3+\cdots+n$ in kompakter Form darstellen?

Aufgabe H28 (Eine rekursive Folge) (0+2+2+2 Punkte) Wir betrachten die Folge $(x_n)_n$ mit $x_0 := 2$ und der rekursive Bildungsvorschrift

$$x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

(i) Berechnen Sie die ersten 6 Folgenglieder.

(ii) Zeigen Sie: Liegt x_n im Intervall $[1,2]$, so liegt auch x_{n+1} in diesem Intervall. Folgern Sie daraus, dass die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist.

(iii) Zeigen Sie: Falls $(x_n)_n$ einen Grenzwert g besitzt, so gilt $g^2 = 2$. Beachten Sie, dass damit nicht die Konvergenz der Folge gezeigt ist. Welche Grenzwerte kommen für die Folge in Frage?

(iv) Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_n)_n$ tatsächlich einen Grenzwert besitzt. Betrachten Sie hierzu die Folge $(y_n)_n$ mit $y_n := x_n - \sqrt{2}$. Zeigen Sie, dass $(y_n)_n$ positiv und monoton fallend ist. Folgern Sie daraus die Konvergenz von $(y_n)_n$ und von $(x_n)_n$.

Folgende Grenzwerte sollten Sie mindestens (ohne Nachschlagen) kennen:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \text{, falls } a > 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ , \qquad \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{a}{n})^n = e^a\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty\ \text{, falls } a > 1\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = 0\ \text{, falls } |a| < 1\ .$$

für eine feste reelle Zahl a und eine feste natürliche Zahl k.