



## Mathematik I für MB

### 8. Übung

#### Wiederholungsaufgaben Ungleichungen und Beträge

##### Aufgabe W12

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Ungleichungen? Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

- (i)  $|x - 1| < 2$ ,
- (ii)  $|x + 2| \leq |x - 1|$ .

##### Aufgabe W13

Skizzieren Sie jeweils für welche Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  folgende Ungleichungen gelten:

- (i)  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ ,
- (ii)  $|x + y| \leq 1$ .

#### Präsenzaufgaben

##### Aufgabe P22

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie Spur und Determinante der Matrix.
- (ii) Stellen Sie das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  auf und bestimmen Sie die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Wo finden Sie im Polynom  $p(\lambda)$  die Spur und die Determinante der Matrix wieder?
- (iii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils Eigenvektoren und die zugehörigen Fixgeraden.

##### Aufgabe P23

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist diese Matrix diagonalisierbar?

##### Aufgabe P24

- (i) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische, invertierbare Matrix und  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ,  $r \leq n$  sämtliche Eigenwerte von  $A$ . Was sind die Eigenwerte von  $A^{-1}$ ?
- (ii) Wenn  $v \in \mathbb{R}^n$  Eigenvektor von  $A$  ist, ist  $v$  dann auch Eigenvektor von  $A^{-1}$ ?
- (iii) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $B^{-1}$ , wobei  $B$  die Matrix aus Aufgabe P23 ist.

## Hausaufgaben

### Aufgabe H22 (2 × 2 Punkte)

Gegeben Sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stellen Sie das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  auf und bestimmen Sie die Eigenwerte.
- (ii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die Eigenvektoren.

### Aufgabe H23 (2 × 2 Punkte)

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- (i) Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass die Matrix  $A$  symmetrisch ist und die Eigenwerte  $0, 2$  und  $-2$  besitzt.
- (ii) Bestimmen Sie jeweils die zugehörigen Eigenvektoren.

### Aufgabe H24 (2 × 2 Punkte)

- (i) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix  $P$  an, für die  $P^T A P$  diagonal ist und berechnen Sie  $P^T A P$ .

- (ii) Sei  $D$  die darstellende Matrix einer Drehung in  $\mathbb{R}^2$ , d.h.

$$D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkel  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie, für welche Winkel  $\alpha$  die Matrix reelle Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  besitzt und bestimmen Sie die zugehörigen Fixgeraden.