



Mathematik I für MB

8. Übung

Wiederholungsaufgaben Ungleichungen und Beträge

Aufgabe W12

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen? Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

- (i) $|x - 1| < 2$,
- (ii) $|x + 2| \leq |x - 1|$.

Aufgabe W13

Skizzieren Sie jeweils für welche Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ folgende Ungleichungen gelten:

- (i) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$,
- (ii) $|x + y| \leq 1$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P22

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie Spur und Determinante der Matrix.
- (ii) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf und bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wo finden Sie im Polynom $p(\lambda)$ die Spur und die Determinante der Matrix wieder?
- (iii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils Eigenvektoren und die zugehörigen Fixgeraden.

Aufgabe P23

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist diese Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe P24

- (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische, invertierbare Matrix und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $r \leq n$ sämtliche Eigenwerte von A . Was sind die Eigenwerte von A^{-1} ?
- (ii) Wenn $v \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A ist, ist v dann auch Eigenvektor von A^{-1} ?
- (iii) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B^{-1} , wobei B die Matrix aus Aufgabe P23 ist.

Hausaufgaben

Aufgabe H22 (2 × 2 Punkte)

Gegeben Sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf und bestimmen Sie die Eigenwerte.
- (ii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die Eigenvektoren.

Aufgabe H23 (2 × 2 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- (i) Bestimmen Sie a und b so, dass die Matrix A symmetrisch ist und die Eigenwerte $0, 2$ und -2 besitzt.
- (ii) Bestimmen Sie jeweils die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe H24 (2 × 2 Punkte)

- (i) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix P an, für die $P^T A P$ diagonal ist und berechnen Sie $P^T A P$.

- (ii) Sei D die darstellende Matrix einer Drehung in \mathbb{R}^2 , d.h.

$$D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkel $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie, für welche Winkel α die Matrix reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ besitzt und bestimmen Sie die zugehörigen Fixgeraden.