Prof. U. Reif
S. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS08/09
28.11.2008

Mathematik für MB

7. Übung

Wiederholungsaufgaben

W11 (Fakultät und Binomialkoeffizient)

i) Wiederholen Sie die Begriffe *Fakultät* und *Binomialkoeffizient* an folgenden Beispielen:

$$0!\,,\quad 1!\,,\quad 2!\,,\quad 3!\,,\quad 4!\,,\quad 5!\,,$$
$$\binom{4}{3}\,,\quad \binom{7}{3}\qquad \text{mit}\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ .$$

ii) Zeigen Sie die Identität:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\ .$$

iii) Der binomische Lehrsatz für $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ lautet :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\ .$$

Führen Sie den Satz für $n = 2, 3, 4$ aus.

Präsenzaufgaben

P19 (Ähnliche Matrizen)

Gegeben seien zwei ähnliche Matrizen A und $\tilde{A}$, d.h. mit einer invertierbaren Matrix V gilt

$$\tilde{A} = V^{-1}AV\ .$$

Zeigen Sie:

i) Ist A eine Projektion, d.h. gilt $A^2 = A$, dann ist auch $\tilde{A}$ eine Projektion.

ii) Ist B eine Spiegelung, d.h. gilt $B^2 = E$, dann ist auch $\tilde{B}$ eine Spiegelung.

P20 (Fixpunkte und Fixpunktgerade)

Entscheiden Sie:

i) Besitzt eine lineare Abbildung einen Fixpunkt $\vec{p} \neq 0$, so besitzt sie eine Fixpunktgerade.

ii) Besitzt eine lineare Abbildung zwei Fixpunkte $\vec{p}, \vec{q} \neq 0$, so ist jede Gerade in der Ebene mit Richtungsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ eine Fixpunktgerade.

iii) Bestimmen Sie die Fixpunktgerade der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}\ .$$

P21 (Householder-Transfromation)

Es sei $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Die so genannte *Householder-Transformation* ist gegeben durch:

$$B = E - 2\frac{\vec{n}\vec{n}^T}{||\vec{n}||^2} \ .$$

Weisen Sie nach, daß B symmetrisch, orthogonal und eine Spiegelung ist.

Hausaufgaben

H19 (LGS mit Parameter) 4 Punkte

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda-1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(a) keine,

(b) genau eine,

(c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

H20 (Ähnliche Matrizen) 2 Punkte

Gegeben seien zwei ähnliche Matrizen A und $\tilde{A}$, d.h., es gibt eine invertierbare Matrix V mit

$$\tilde{A} = V^{-1}AV \ .$$

Zeigen Sie: Ist A eine Drehung, d.h. $A^T \cdot A = E$ und $\det A = 1$, und ist außerdem V orthogonal, so ist $\tilde{A}$ eine Drehung.

H21 (Fixpunkte und Fixpunktgeraden) 4 Punkte

Seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

i) Entscheiden, ob die Abbildungen mit Matrix A, B und C eine Projektion, Spiegelung oder Drehung ist.

ii) Bestimmen Sie jeweils die Fixpunktgeraden.

iii) Bestimmen Sie eine Fixpunktgerade der verketteten Abbildung mit Matrix BAB^{-1}.

iv) Besitzt die verkettete Abbildung mit Matrix AC eine Fixpunktgerade? Geben Sie eine Begründung.