Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

Mathematik I für MB

6. Übung

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe W10 (Polynomdivision) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision alle reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \, .$$

Hinweis: Für jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$ ist jede ganzzahlige Nullstelle ein Teiler von a_0.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P16 (Orthogonale Matrizen und Drehmatrizen in der Ebene)

(i) In der Vorlesung wurde eine (2×2)-Drehmatrix $D(\alpha)$ mit Drehwinkel $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie das Bild $D(\alpha)\vec{x}$ des Vektors $\vec{x} = (1,1)^T$ nach einer Drehung um die Drehwinkel $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi$ und $\alpha_4 = 2\pi$.
Fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Entscheiden Sie jeweils, ob eine Drehmatrix vorliegt und berechnen Sie ggf. den Drehwinkel α:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P17 (Punktspiegelung im $\mathbb{R}^2$) Die Punkte $\vec{x}_1 = (1,3)^T$ und $\vec{x}_2 = (4,2)^T$ sollen am Ursprung gespiegelt werden.

(i) Zeichnen Sie $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ und die entsprechend gespiegelten Vektoren $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ in eine Skizze ein.

(ii) Finden Sie die Abbildungsmatrix der Punktespiegelung, d.h. bestimmen Sie eine (2×2)-Matrix A mit

$$A\vec{x}_1 = \vec{y}_1 \qquad \text{und} \qquad A\vec{x}_2 = \vec{y}_2 \, .$$

Bestimmen Sie dazu die Spiegelbilder der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1,0)^T$ und $\vec{e}_2 = (0,1)^T$. Wie setzt sich A aus diesen Bildern zusammen?

(iii) Berechnen Sie die Determinante von A. Ist A orthogonal?

Aufgabe P18 (Linear oder nicht) Kreuzen Sie diejenigen Abbildungen an, die linear sind:

- ☐ $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_1(x,y,z) := (x+y,\ x+z,\ y-z)^T,$
- ☐ $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f_2(x,y) := (x^2,\ y^2,\ x-y)^T,$
- ☐ $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) := 2x+3,$
- ☐ $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f_4(x) := (0,x,2x)^T,$
- ☐ $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_5(x,y) := xy,$
- ☐ $f_6 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_6(\vec{x}) := \|\vec{x}\|,$
- ☐ $f_7 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_7(\vec{x}) := \alpha \cdot \vec{x}$ mit festem $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ $f_8 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_8(\vec{x}) := \vec{a} \times \vec{x}$ mit festem $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie für die linearen Abbildungen jeweils die darstellende Matrix.

Hausaufgaben

Aufgabe H16 (orthogonale Matrizen) (3 Punkte) Welche der folgenden Matrizen lässt sich zu einer orthogonalen Matrix vervollständigen? Begründen Sie ihre Entscheidung und geben Sie ggf. eine mögliche Vervollständigung an:

$$A = \begin{pmatrix} * & 5 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \\ 1 & -1 & * \end{pmatrix}$$

Aufgabe H17 (Spiegelung an einer Geraden) (2+2+2 Punkte) Wir betrachten die Spiegelung an der Geraden

$$g : \vec{x} = \lambda(1,1)^T, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

(i) Wir betrachten das Dreieck mit Eckpunkten

$$P = (4,0)^T\ , \qquad Q = (5,3)^T\ , \qquad R = (3,2)^T\ .$$

Bestimmen Sie grafisch das Spiegelbild des Dreiecks anhand einer Skizze. Kennzeichnen Sie insbesondere die Spiegelbilder von P, Q und R.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der Spiegelung aus den Bildern der Einheitsvektoren.

(iii) Berechnen Sie alle Seitenlängen, alle Innenwinkel sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe H18 (Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$) (2+2+2 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die folgende Matrix A eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\ .$$

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel α.

(iii) Bestimmen Sie einen Einheitsvektor $\vec{v}$ der in Richtung der Drehachse liegt.