Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 14. – 19.11.08

Mathematik I für MB

5. Übung

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe W9 (Exponentialfunktion und Wachstum)
Eine Population der Anfangsgröße $y(0) = 1000$ habe eine tägliche Wachstumsrate von 10%. Das Wachstum verlaufe nach dem Gesetz

$$y(t) = m_0 e^{ct},$$

für eine Konstante $m_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie m_0.

(ii) Bestimmen Sie die Populationsgröße nach dem ersten Tag, d.h., berechnen Sie $y(1)$.

(iii) Bestimmen Sie damit den Parameter c.

(iv) Wie viele Individuen $y(10)$ sind nach 10 Tagen vorhanden?

(v) Nach wie vielen Tagen d hat sich die Population verdoppelt?

Präsenzaufgaben

Aufgabe P13 (Inverse Matrix)
Berechnen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die inverse Matrix.

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P14 (Lineares Gleichungssystem in $\mathbb{R}^3$)
Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - b_1 &= 0 \\ 4x + y + 3z - b_2 &= 0 \\ -y + 3z &= b_3. \end{aligned}$$

(i) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$, mit $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A. Was können Sie bereits jetzt über die Lösbarkeit des Gleichungssystems sagen?

(iii) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A.

(iv) Wie berechnet man die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe der inversen Matrix? Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems speziell für $b_1 = 6$, $b_2 = 3$ und $b_3 = 10$.

Aufgabe P15 (Transponieren und Invertieren)
Zeigen Sie, dass folgende Rechenregeln gelten:

$$\text{(i) } (AB)^T = B^T A^T \quad \text{(ii) } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad \text{(iii) } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Hausaufgaben

Aufgabe H13 (Kreuzprodukt) (2 Punkte)
Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{x} = (a, c, 0)^T$ und $\vec{y} = (b, d, 0)^T$. Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ und formulieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Determinante einer geeigneten Matrix.

Aufgabe H14 (Inverse Matrizen) (3 × 2 Punkte)
Berechnen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die inverse Matrix.

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ für } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie in Aufgabenteil (iii) für die Matrix C ein Kriterium für die Invertierbarkeit an.

Aufgabe H15 (Rechenregeln) (6 Punkte) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebige quadratische Matrizen. Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie im Allgemeinen wahr oder falsch sind. Geben Sie zu jeder falschen Aussage ein Gegenbeispiel an.

(1) $AB = BA$.

(2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3) $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ für A invertierbar.

(4) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(5) Aus $AB = 0$ (Nullmatrix) folgt $A = 0$ oder $B = 0$.

(6) $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^T\vec{y} \rangle$ für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

(7) $\det((AB)^T) = \det(A)\det(B)$.

(8) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

(9) $A^T A = E_n$.

(10) $AA^{-1} = A^{-1}A$.

(11) Ist A orthogonal, so ist $A^{-1} = A$.

(12) $\det(\alpha B) = \alpha \det(B)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Es sind 6 Aussagen wahr und 6 falsch.