

## Mathematik I für MB

### 4. Übung

#### Wiederholungsaufgaben Logarithmus

Für reelle Zahlen  $a, x > 0$  mit  $a \neq 1$  ist der *Logarithmus*  $\log_a x$  von  $x$  zur Basis  $a$  definiert als diejenige reelle Zahl  $y$  mit  $a^y = x$ .

Der Logarithmus zur Basis  $e = 2.71\dots$  heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit  $\ln$  bezeichnet. Der Logarithmus zur Basis  $a = 10$  heißt *dekadischer Logarithmus*.

**Aufgabe W6** Berechnen Sie in folgenden Gleichungen jeweils den Wert von  $x$ :

(i)  $\log_{1/2} 256 = x^3$ ,                      (ii)  $\log_x 2 = -2/3$ ,                      (iii)  $2^{x \ln x} = 3^{\ln x}$ .

**Aufgabe W7**

(i) Zeigen Sie, dass für alle  $a, b, x > 0$  gilt:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Insbesondere gilt also  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .

(ii) Zeigen Sie folgende Rechenregeln für alle  $a, x, y > 0$  und  $r \in \mathbb{R}$ :

(a)  $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ ,                      (b)  $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ ,                      (c)  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ .

**Aufgabe W8** Skizzieren Sie jeweils die Funktionen

(i)  $\ln x$ , für  $x > 0$ ,                      (ii)  $\ln |x|$ , für  $x \neq 0$ .

#### Präsenzaufgaben

**Aufgabe P10 (Produkte von Matrizen)** Berechnen Sie alle möglichen Produkte zwischen den folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe P11 (Determinante, Rang, Kern)**

(i) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie den Kern von  $C$ .

(iii) Welchen Rang hat  $C$  und welche Dimension hat der Kern von  $C$ ?

**Aufgabe P12 (Transponierte einer Matrix)**

(i) Berechnen Sie zu folgenden Matrizen jeweils die transponierte Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Finden Sie den Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass  $A_\alpha \cdot A_\alpha^T = A_\alpha^T \cdot A_\alpha$  gilt mit

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Hausaufgaben**

**Aufgabe H10 (2 Punkte)** Berechnen Sie alle möglichen Produkte zwischen den folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H11 (2+2 Punkte)**

(i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Welchen Rang hat  $A$ ? Bestimmen Sie den Kern von  $A$  und dessen Dimension.

**Aufgabe H12 (2+2 Punkte)**

(i) Finden Sie die Menge aller  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $B$ , so dass  $A \cdot B = B \cdot A$  für die Matrix  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  gilt.

(ii) Finden Sie zu der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix  $B$  mit  $A \cdot B = E$ . Berechnen Sie das Produkt  $B \cdot A$ .