Prof. U. Reif
S. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS08
31.10.2008

Mathematik für MB

3. Übung

Wiederholungsaufgaben

W05 Potenz- und Wurzelfunktionen

i) Vervollständigen Sie:

$$\begin{array}{ll} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\cdots]{a^{\cdots}} & \text{für } m,n \in \mathbb{N},\ n \neq 0; \\ \frac{1}{a^p} = a^{\cdots} & \text{für } a > 0,\ p > 0 \text{ bzw. } a \neq 0,\ p \in \mathbb{N}; \\ a^p \cdot a^q = a^{\cdots},\ (a^p)^q = a^{\cdots},\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^{\cdots} & \text{für } a,b > 0,\ p,q \in \mathbb{R} \end{array}$$

ii) Vereinfachen Sie, so weit möglich, die folgenden Ausdrücke.

a) $\frac{\sqrt[3]{ab^4}}{\sqrt[5]{a^2b^4}}$ b) $\frac{a^3b^2}{\sqrt{ab^3}}$ c) $\frac{(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{a})^2}{a}$

iii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ (natürlich $n \neq 0$!) beliebig gewählt. Für welche $a > 0$ gilt

$$a^{(n^{-1})} > (a^n)^{-1} \text{ ?}$$

Präsenzaufgaben

P07 Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie die folgenden zwei Gleichungssysteme:

i) $2x + 3y - z = 1$ ii) $2x + y - 7z = 0, \quad x - 3y + z = 2$

Interpretieren Sie Ihre Resultate geometrisch.

P08 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus I

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

P09 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus II

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Hausaufgaben

H07 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus III (2 Punkte)

Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

H08 Schwerpunkt (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ liege eine quadratische Platte (Seitenlänge $s = 20$) parallel zur $[x, y]$-Ebene und den Seiten parallel zu den Koordinatenachsen mit dem Mittelpunkt im Punkt $Q = (0, 0, 1)$ ideal auf der Spitze eines Kegels auf. Auf der Platte sollen an den Punkten $P_1 = (10, 0, 1), P_2 = (1, 1, 1)$ Kugeln K_1, K_2 der Masse $m_1 = 2$ bzw. $m_2 = 4$ sowie zwei weitere Kugeln der Masse $m_3 = 6$ und $m_4 = 3$ positioniert werden. An welchen Punkten muss man die Kugeln K_3 und K_4 auf die Platte legen, dass sie im Gleichgewicht bleibt? Fertigen Sie hierzu eine Skizze an, in die Sie auch ihre Lösung einzeichnen.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass die Kugeln auch tatsächlich auf der Platte liegen.

H09 Aufgabe aus der Klausur zur Vordiplomprüfung Mathematik IWS 2004/05
Bearbeitungszeit: 20 Minuten (4 Punkte)

i) Bestimmen Sie alle Lösungsvektoren $\vec{x}$ des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & \alpha \\ 2 & \alpha & 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die gesamte Lösungsmenge in vektorieller Form an.

Hinweis: Als "kritische" Parameter stellen sich $\alpha = 4, \alpha = 6$ und $\alpha = 8$ heraus. Kennzeichnen Sie in Ihren Rechnungen das Auftreten dieser Parameter und begründen Sie, weshalb Sie diese als kritisch ansehen sollten! Analysieren Sie Ihre Rechnungen schließlich noch einmal für diese kritischen Fälle.

ii) Welchen Rang hat die Matrix A in Abhängigkeit von α?