Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 24. – 29.10.08

Mathematik I für MB

2. Übung

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe W3 (Einheitskreis)

(i) Skizzieren Sie den Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(ii) Zeichnen Sie einen beliebigen Winkel α in die Skizze ein. Erläutern Sie anhand Ihrer Skizze den Zusammenhang zwischen Gradmaß und Bogenmaß des Winkels.

(iii) Kennzeichnen Sie die Strecken in Ihrer Skizze, welche die Länge $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ haben?

(iv) Begründen Sie anhand Ihrer Skizze die Identität

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe W4 (Eigenschaften von Winkelfunktionen)

(i) Skizzieren Sie den Graph der Funktionen $\cos, \sin$ und $\tan$ auf einem geeigneten Definitionsbereich. Welche Perioden für diese drei Funktionen können Sie bereits der obigen Skizze entnehmen?

(ii) Lesen Sie aus Ihrer Skizze jeweils einen Winkel ω ab, so dass folgende Gleichheiten gelten:

$$\text{(i) } \sin(\alpha + \omega) = \cos(\alpha), \quad \text{(ii)} \cos(\alpha + \omega) = \sin(\alpha), \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Präsenzaufgaben

Aufgabe P5 (Geraden und Ebenen)

(i) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (2, 3)^T$ zur Geraden $g : \vec{x} = (1, 1)^T + \lambda(1, 1)^T$. Fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der implizit gegebenen Ebene $E : x - y + 2z = 5$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Aufgabe P6 (Schnitte von Ebenen)

(i) Zeigen sie, dass der Punkt $(-2, 4, 0)$ sowohl auf

$$E_1 : x + y - 3z = 2 \quad \text{als auch auf} \quad E_2 : 2x + y + z = 0$$

liegt.

(ii) Berechnen Sie die Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E_1 und E_2. Suchen Sie hierzu einen Vektor, der auf den Normalenvektoren der beiden Ebenen senkrecht steht, und benutzen Sie das Ergebnis aus (i).

(iii) Von welcher der beiden Ebenen ist $(-4, 11, 1)$ weiter entfernt?

Aufgabe P7 (Geraden in $\mathbb{R}^4$) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 : (-1, 1, 0, -3)^T + \lambda(1, -1, 2, 0)^t \text{ und } g_2 : (0, 2, 0, 1)^T + \mu(1, 1, 0, 1)^T.$$

Hausübungen

Aufgabe H4 (Geraden und Ebenen) (3 × 2 Punkte)

(i) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 : \vec{x} = (0,1,-2)^T + \lambda_1(1,1,-3)^T, \quad g_2 : \vec{x} = (0,0,2)^T + \lambda_2(-1-1,2)^T.$$

(ii) Überführen Sie die in Parameterform gegebene Ebene

$$E : \vec{x} = (1,0,2)^T + \lambda(1,1,0)^T + \mu(3,1,2)^T$$

in eine Koordinatenform und bestimmen Sie ihre Hessesche Normalform. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

(iii) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$g : \vec{x} = (-1,4,-2)^T + \lambda(1,-1,-2)^T$$

mit der Ebene

$$E : \vec{x} = (2,5,-1)^T + \mu_1(4,0,3)^T + \mu_2(-1,1,1)^T.$$

Aufgabe H5 (Parameterabhängige Geraden) (2 × 2 Punkte) Gegeben seien die beiden Geraden

$$g_1 : (0,0,0)^T + \lambda(1,1,2)^T \text{ und } g_2 : (1,1,\alpha)^T + \mu(1,\alpha,2)^T$$

in $\mathbb{R}^3$ für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie für welchen Wert von α die Geraden parallel sind und für welchen Wert sie sich schneiden.

(ii) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden in Abhängigkeit von α. Berechnen Sie den Abstand konkret für $\alpha = 3$, $\alpha = 7$ und $\alpha = -3$.

Aufgabe H6 (Zum Feierabend) (2 Punkte) In einer Wirtschaft werden drei Tische wie folgt bedient:

(T1) An Tisch 1 lieferte der Wirt 6 Bier, 3 Schnitzel und 4 Schnäpse;
Gesamtkosten: 47 Euro

(T2) Tisch 2 bekam 3 Bier, 3 Schnitzel und ebenfalls 4 Schnäpse;
Gesamtkosten: 38 Euro

(T3) Tisch 3 wurde bedient mit 3 Bier, 2 Schnitzeln und 2 Schnäpsen;
Gesamtkosten: 26 Euro.

Berechnen Sie jeweils den Preis für ein Bier, ein Schnitzel und einen Schnaps.