Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

Mathematik I für MB
Lösungsvorschläge
8. Übung

Aufgabe H22 (2 × 2 Punkte)
Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27$. Man errät die erste Nullstelle, z.B. $\lambda_1 = -3$. Durch Polynomdivision ergibt sich dann $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

(ii) Man löst wieder das Gleichungssystem $\det(A - \lambda_i E_3)v_i = 0$ und erhält

$$v_1 = r(1, -1, 2)^T,$$
$$v_2 = s(1, 1, 0)^T + t(-2, 0, 1)^T,$$

mit $r, s, t \in \mathbb{R}$ frei wählbar.

Aufgabe H23 (2 × 2 Punkte)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Damit die Matrix symmetrisch ist, muss $b = a$ sein. Weiterhin

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2a - \lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{pmatrix} &= (-\lambda) \cdot \big((2a - \lambda)(-\lambda) - a^2\big) - 2 \cdot (2(-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 2a\lambda^2 + (4 + a^2)\lambda \\ &= (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2a\lambda - (4 + a^2)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{2a^2 + 4}$. Also ist $a = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

(a) für $\lambda_1 = 0$, $v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) für $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

(c) für $\lambda_3 = -2$, $v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H24 (2 × 2 Punkte)

(i) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ von A lautet

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2t - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

und daher sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte von A. Als zugehörige Eigenvektoren ergeben sich z.B. $v_1 = (1,-1)$ und $v_2 = (1,1)$. Man normalisiert v_1 und v_2 und erhält: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ sowie $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Dann ist

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Matrix und es ist

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie erwartet finden sich die Eigenwerte von A auf der Diagonalen.

(ii) Sei D die darstellende Matrix einer Drehung in $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkel $\alpha \in \mathbb{R}$.
Das charakteristische Polynom von D ist

$$p(\lambda) = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin(\alpha)^2 = \lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + (\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2).$$

Mit der Identität $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ ist das also

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + 1.$$

Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{\cos(\alpha)^2 - 1} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{-\sin(\alpha)^2}.$$

Da $\sin(\alpha)^2 \geq 0$ ist und wir unter der Wurzel für relle Werte kein negatives Vorzeichen haben dürfen, muss $\sin(\alpha) = 0$ sein. Man hat also zwei Fälle:

1. $\alpha = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\cos(\alpha) = \cos(2\pi k) = \cos(0) = 1$ und somit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. In dem Falle ist $D = E_2$ und die Abbildung ist die Identität auf $\mathbb{R}^2$ (d.h. $Ax = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$).
2. $\alpha = \pi(2k+1)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\cos(\alpha) = \cos(2\pi k + \pi) = \cos(\pi) = -1$. Dann ist

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. D ist die Punktspiegelung am Ursprung in $\mathbb{R}^2$. Es ergibt sich dann, dass jede Ursprungsgerade eine Fixgerade ist, denn in beiden Fällen ist $(D - \lambda_1 E - 2) = (D - \lambda_2 E_2)$ die Nullmatrix.