LÖSUNG: zu Aufgabe P18

(i) Für alle $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) &= f_1(x+x',\ y+y',\ z+z') \\
&= (x+x'+y+y', x+x'+z+z', y+y'-z-z')^T \\
&= (x+y,\ x+z,\ y-z)^T + (x'+y',\ x'+z',\ y'-z')^T \\
&= f_1(x,y,z) + f_1(x',y',z')\ , \\
f_1\big(\lambda(x,y,z)\big) &= f_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda z, \lambda y - \lambda z)^T \\
&= \lambda(x+y, x+z, y-z)^T = \lambda f_1(x,y,z)\ .
\end{aligned}$$

Die Abbildung f_1 ist also linear. Die darstellende Matrix ist gegeben durch:

$$A_1 = \big(\ f(1,0,0)\ \big|\ f(0,1,0)\ \big|\ f(0,0,1)\ \big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

(ii) Die Abbildung f_2 ist nicht linear, denn $f_2(2,0) = f_2(2\cdot(1,0)) \neq 2\cdot f_2(1,0)$.

(iii) Die Abbildung f_3 ist nicht linear wegen $f_3(0) = 2 \neq 0$.

(iv) Es gilt $f_4(x) = x\cdot(0,1,2)^T$. Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f_4(x+x') &= (x+x')\cdot(0,1,2)^T = x\cdot(0,1,2)^T + x'\cdot(0,1,2)^T = f_4(x)+f_4(x')\ , \\
f_4(\lambda\cdot x) &= (\lambda\cdot x)\cdot(0,1,2)^T = \lambda\cdot\big(x\cdot(0,1,2)^T\big) = \lambda\cdot f_4(x)\ .
\end{aligned}$$

Die Abbildung f_4 ist also linear mit der darstellenden Matrix

$$A_4 = f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

(v) Die Abbildung f_5 ist nicht linear, denn $f_5(2,2) = f_5(2\cdot(1,1)) \neq 2\cdot f_5(1,1)$.

(vi) Die Abbildung f_6 ist nicht linear, denn $1 = f_6(-1,0) \neq -f_6(1,0) = -1$.

(vii) Für alle $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in R$ gilt

$$\begin{aligned}
f_7(\vec{x}+\vec{x}') &= \alpha\cdot(\vec{x}+\vec{x}') = (\alpha\cdot\vec{x}) + (\alpha\cdot\vec{x}') = f_7(\vec{x}) + f_7(\vec{x}')\ , \\
f_7(\lambda\cdot\vec{x}) &= \alpha\cdot(\lambda\cdot\vec{x}) = \lambda\cdot(\alpha\cdot\vec{x}) = \lambda\cdot f_7(\vec{x})\ .
\end{aligned}$$

Die Abbildung ist also linear. Die Abbildungsmatrix hat die Form

$$A_7 = \big(f_7(e_1)\mid f_7(e_2)\mid \ldots \mid f_7(e_n)\big) = \big(\alpha e_1 \mid \alpha e_2 \mid \ldots \mid \alpha e_n\big) = \alpha\cdot E_n\ .$$

(viii) Für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
f_8(\vec{x}+\vec{x}') = \vec{a}\times(\vec{x}+\vec{x}') &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \\ x_3+x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(x_3+x_3') - a_3(x_2+x_2') \\ a_3(x_1+x_1') - a_1(x_3+x_3') \\ a_1(x_2+x_2') - a_2(x_1+x_1') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2x_3' - a_3x_2' \\ a_3x_1' - a_1x_3' \\ a_1x_2' - a_2x_1. \end{pmatrix} = (\vec{a}\times\vec{x}) + (\vec{a}\times\vec{x}') = f_8(\vec{x}) + f_8(\vec{x})\ , \\
f_8(\lambda\cdot\vec{x}) = \vec{a}\times(\lambda\cdot\vec{x}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_2x_3 - \lambda a_3x_2 \\ \lambda a_3x_1 - \lambda a_1x_3 \\ \lambda a_1x_2 - \lambda a_2x_1 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \lambda(\vec{a}\times\vec{x})\ .
\end{aligned}$$

Die Abbildung ist also linear. Weiter gilt

$$\vec{a}\times\vec{e}_1 = (0, a_3, -a_2)^T\ , \qquad \vec{a}\times\vec{e}_2 = (-a_3, 0, a_1)^T\ , \qquad \vec{a}\times\vec{e}_3 = (a_2, -a_1, 0)^T\ .$$

Damit hat ist die Abbildungsmatrix von f_8 gegeben durch

$$A_8 = \big(f_8(\vec{e}_1)\mid f_8(\vec{e}_2)\mid f_8(\vec{e}_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$