Aufgabe H39 (2+2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)$$

für alle $x \neq 0$.

(i) Definieren Sie $f(0)$ derart, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(ii) Ist die von Ihnen definierte stetige Ergänzung differenzierbar?

LÖSUNG: (i) Für alle $x \neq 0$ gilt

$$f(x) = \tfrac{1}{x^2}(\sqrt{1+x^2} - 1) = \tfrac{1}{x^2} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1} = \tfrac{1}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

Für den Grenzübergang $x \to 0$ gilt somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0^2}+1} = 1/2$$

Setzt man $f(0) := 1/2$ erhält man somit eine stetig Ergänzung von f.

(ii) Wir zeigen, dass die stetige Ergänzung von f auch im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist, indem wir den Differenzenquotienten berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} - \tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} \cdot \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} \cdot \frac{1^2-(1+x^2)}{(1+\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(1+\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{0}{1+\sqrt{1+0^2}} = 0$$