Aufgabe H28 (Eine rekursive Folge) (0+2+2+2 Punkte) Wir betrachten die Folge $(x_n)_n$ mit $x_0 := 2$ und der rekursive Bildungsvorschrift

$$x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

(i) Berechnen Sie die ersten 6 Folgenglieder.

(ii) Zeigen Sie: Liegt x_n im Intervall $[1, 2]$, so liegt auch x_{n+1} in diesem Intervall. Folgern Sie daraus, dass die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist.

(iii) Zeigen Sie: Falls $(x_n)_n$ einen Grenzwert g besitzt, so gilt $g^2 = 2$. Beachten Sie, dass damit nicht die Konvergenz der Folge gezeigt ist. Welche Grenzwerte kommen für die Folge in Frage?

(iv) Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_n)_n$ tatsächlich einen Grenzwert besitzt. Betrachten Sie hierzu die Folge $(y_n)_n$ mit $y_n := x_n - \sqrt{2}$. Zeigen Sie, dass $(y_n)_n$ positiv und monoton fallend ist. Folgern Sie daraus die Konvergenz von $(y_n)_n$ und von $(x_n)_n$.

LÖSUNG: (ii) Wir nehmen $x_n \in [1, 2]$ an. Dann gilt $1/2 \leq \frac{x_n}{2} \leq 1$ und $1/2 \leq \frac{1}{x_n} \leq 1$ und es folgt

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \leq 1 + 1 = 2 ,$$

d.h. $x_{n+1} = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{x_n} \in [1, 2]$.

Da der Startwert $x_0 = 2$ im Intervall $[1, 2]$ liegt, haben wir damit gezeigt, dass auch x_1, damit auch x_2 und x_3 usw. im Intervall $[1, 2]$ liegen. Insgesamt liegt also der Wert x_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ in diesem Intervall. (Das mathematische Beweisverfahren hierfür, die vollständige Induktion, werden ihr evtl. später noch kennenlernen.)

(iii) Wir nehmen an, dass die Folge $(x_n)_n$ einen Grenzwert $g := \lim_n x_n$ besitzt. Für diesen Grenzwert gilt dann mit Hilfe der Grenzwertsätze

$$g^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} x_n x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2}x_n^2 + 1) = \tfrac{1}{2}g^2 + 1 ,$$

also $g^2 = 2$. Als Grenzwerte für die Folge $(x_n)_n$ kommen damit nur $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ in Frage. Da wir zuvor schon gesehen haben, dass x_n stets im Intervall $[1, 2]$ liegt, bleibt nur $\sqrt{2}$ als möglicher Grenzwert.

(iv) Wir zeigen zuerst, dass y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ positiv ist. Für den Startwert $y_0 = 2 - \sqrt{2}$ ist dies erfüllt. Außerdem gilt für alle $n \geq 0$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} = \frac{y_n^2}{2x_n} . \tag{2}$$

Der Zähler dieses Bruches ist als Quadrat positiv und der Nenner ist positiv, da x_n für alle $n \in \mathbb{N}$ im Intervall $[1, 2]$ liegt. Somit ist y_{n+1} positiv.

Wir zeigen nun, dass die Folge $(y_n)_n$ monoton fallend ist. Wir betrachten dazu weiter Gleichung (2). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nun $0 \leq y_n \leq x_n$ und somit

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2x_n} \leq \frac{y_n^2}{2y_n} = \tfrac{1}{2}y_n \leq y_n .$$