LÖSUNG: zu P7

Der Abstand $d(g_1, g_2)$ der beiden Geraden ist gegeben durch

$$d(g_1, g_2) = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|,$$

wobei $\vec{x}_1 = (-1, 1, 0, -3)^T + \lambda^*(1, -1, 2, 0)^T$ und $\vec{x}_2 = (0, 2, 0, 1)^T + \mu^*(1, 1, 0, 1)^T$, so dass der Verbindungsvektor $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren steht. Also müssen wir ein lineares Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad \left\langle (-1,1,0,-3)^T + \lambda^*(1,-1,2,0)^T - ((0,2,0,1)^T + \mu^*(1,1,0,1)^T), (1,-1,2,0)^T \right\rangle &= 0\\
&(\mathrm{II}) \quad \left\langle (-1,1,0,-3)^T + \lambda^*(1,-1,2,0)^T - ((0,2,0,1)^T + \mu^*(1,1,0,1)^T), (1,1,0,1)^T \right\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (I) führt zu $-2+6\lambda^*+2 = 6\lambda^* = 0$, also $\lambda^* = 0$. Und Gleichung (II) führt zu $-3-3-3\mu^* = 0$, also $\mu^* = -2$.

Es folgt:

$$\vec{x}_1 = (-1, 1, 0, -3)^T, \quad \vec{x}_2 = (0, 2, 0, 1)^T - 2(1, 1, 0, 1)^T = (-2, 0, 0, -1)^T.$$

Und damit hat man

$$d(g_1, g_2) = \|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| = \left\|(1, 1, 0, -2)^T\right\| = \sqrt{6}.$$