LÖSUNG: zu H5

(i) Für $\alpha = 1$ sind g_1 und g_2 parallel, denn dann sind die Richtungsvektoren gleich.

Wir errechnen einen Schnittpunkt:

$$(0,0,0)^T + \lambda(1,1,2)^T = (1,1,\alpha)^T + \mu(1,\alpha,2)^T.$$

Also haben wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & \lambda &= 1+\mu \\ &(\mathrm{II}) & \lambda &= 1+\mu\alpha \\ &(\mathrm{III}) & 2\lambda &= \alpha + 2\mu. \end{aligned}$$

Setzt man (I) in (III) ein, so erhält man $2 + 2\mu = \alpha + 2\mu$ und somit $\alpha = 2$.

Wenn man dies in (II) einsetzt, so ergibt sich $1 + \mu = 1 + 2\mu$ und somit $\mu = 0$ und $\lambda = 1$. Also schneiden sich g_1 und g_2 für $\alpha = 2$. Der Schnittpunkt ist dann gegeben durch $(1,1,2)^T$.

(ii)
1. Für $\alpha = 1$ muss man den Schnittpunkt ohne den Normalenvektor errechnen, da das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren verschwindet. Man kann aber den Abstand von g_2 zu einem beliebigen Punkt auf g_1 berechnen, in diesem Falle beispielsweise zum Nullpunkt. Man muss ein λ^* bestimmen, so dass der Vektor

   $$\vec{x}^* = (1,1,1)^T + \lambda^*(1,1,2)^T,$$

   senkrecht auf dem Richtungsvektor $(1,1,2)^T$ steht. Nach Vorlesung (1.14) ist

   $$\lambda^* = \frac{\langle\, (0,0,0)^T - (1,1,1)^T, (1,1,2)^T \,\rangle}{\langle\, (1,1,2)^T, (1,1,2)^T \,\rangle} = -\frac{2}{3}.$$

   Dadurch ergibt sich

   $$d(g_1,g_2) = \|\vec{x}^*\| = \left\|(1/3, 1/3, -1/3)^T\right\| = \sqrt{1/9+1/9+1/9} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Für $\alpha = 2$ schneiden sich die Geraden, also ist in diesem Falle $d(g_1, g_2) = 0$.
3. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, errechnet man einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren steht:

   $$\vec{n} = (1,1,2)^T \times (1,\alpha,2)^T = (2\alpha - 2, 0, 1-\alpha)^T.$$

   (Hier sollte man die Probe machen!)

   Damit erhält man laut Vorlesung (1.16)

   $$d(g_1,g_2) = \frac{|\langle\, (1,1,\alpha)^T, (2\alpha-2,0,1-\alpha)^T \,\rangle|}{\|(2\alpha-2,0,1-\alpha)^T\|} = \frac{|-\alpha^2+3\alpha-2|}{\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+5}}.$$

   Anmerkung: Der Nenner hat nur die Nullstelle $\alpha = 1$, also ist im Fall $\alpha \neq 1$ der Abstand immer wohldefiniert. Dies muss man allerdings hier nicht mehr unbedingt überprüfen, da die Norm die Eigenschaft hat, $\|\vec{n}\| = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $\vec{n} = 0$. Den Fall $\vec{n} = 0$ haben wir aber vorher explizit ausgeschlossen.
4. Für $\alpha = 3$ ist $d(g_1, g_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
5. Für $\alpha = 7$ ist $d(g_1, g_2) = \sqrt{5}$.
6. Für $\alpha = -3$ ist $d(g_1, g_2) = \sqrt{5}$.