Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 23. – 28.01.09

Mathematik I für MB
Ergebnisblatt
11. Übung

Präsenzaufgaben

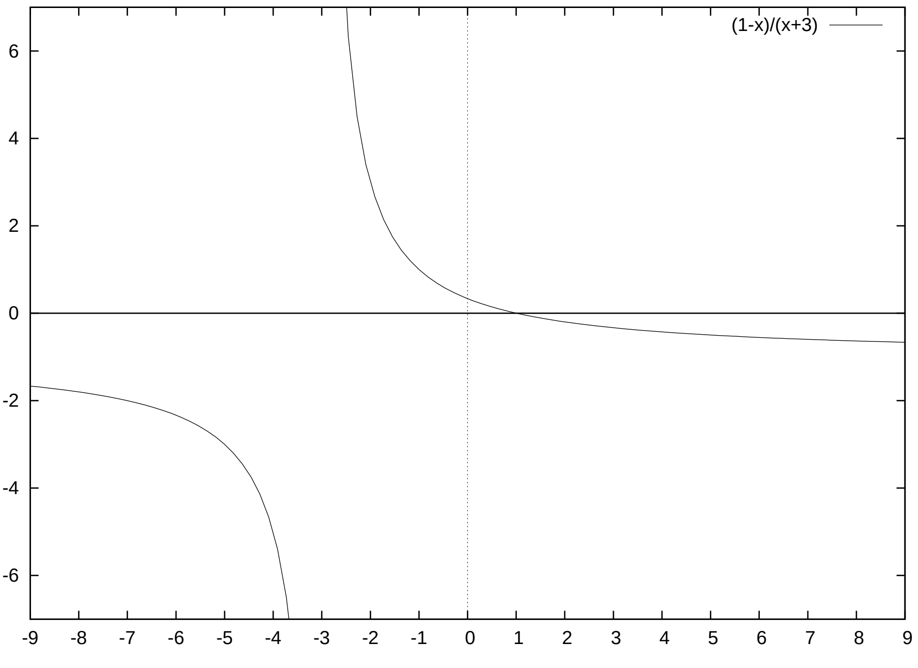
Aufgabe P34 (Eigenschaften von Funktionen)
Gegeben Sei die Funktion
$$f(x) = \frac{1-x}{3+x}.$$

(i) $f(1) = 0$

(ii) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(iii) **Behauptung:** Die Funktion $f(x)$ ist streng monoton fallend auf $(-\infty, -3)$ und $(-3, +\infty)$.
Beweis: Zunächst für das Intervall $I_1 = (-3, +\infty)$. Seien $x, y \in I_1$ mit $x < y$. Zu zeigen ist:
$$f(x) = \frac{1-x}{3+x} > \frac{1-y}{3+y} = f(y).$$
Durch Multiplikation beider Seiten mit $(3+x)(3+y)$ sieht man, dass dies äquivalent ist zu
$$(1-x)(3+y) > (1-y)(3+x).$$
Man beachte, dass $3+x > 0$ und $3+y > 0$ und damit $(3+x)(3+y) > 0$. Durch Ausmultiplizieren erhält man
$$-4x > -4y.$$
Unter der Voraussetzung $x < y$ ist dies erfüllt. Für das Intervall $I_2 = (-\infty, -3)$ funktioniert der Beweis genauso, da dann $3+x < 0$ und $3+y < 0$ und damit ebenso $(3+x)(3+y) > 0$.

(iv)

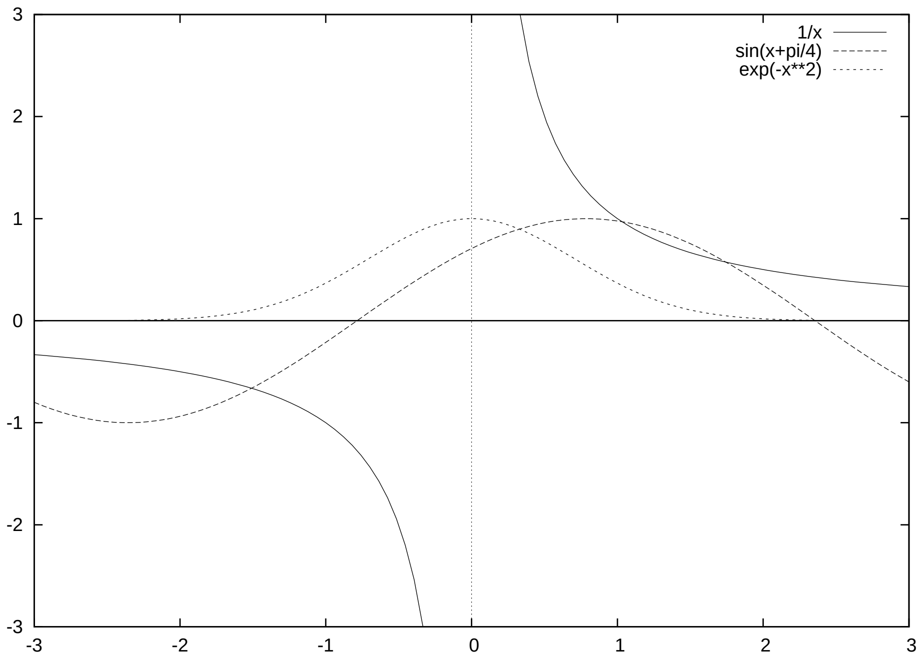


Aufgabe P35 (Verkettung von Funktionen) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin(x + \pi/4), \quad h(x) = e^{-x^2},$$

mit den Definitionsbereichen $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D_g = D_h = \mathbb{R}$.

(i)



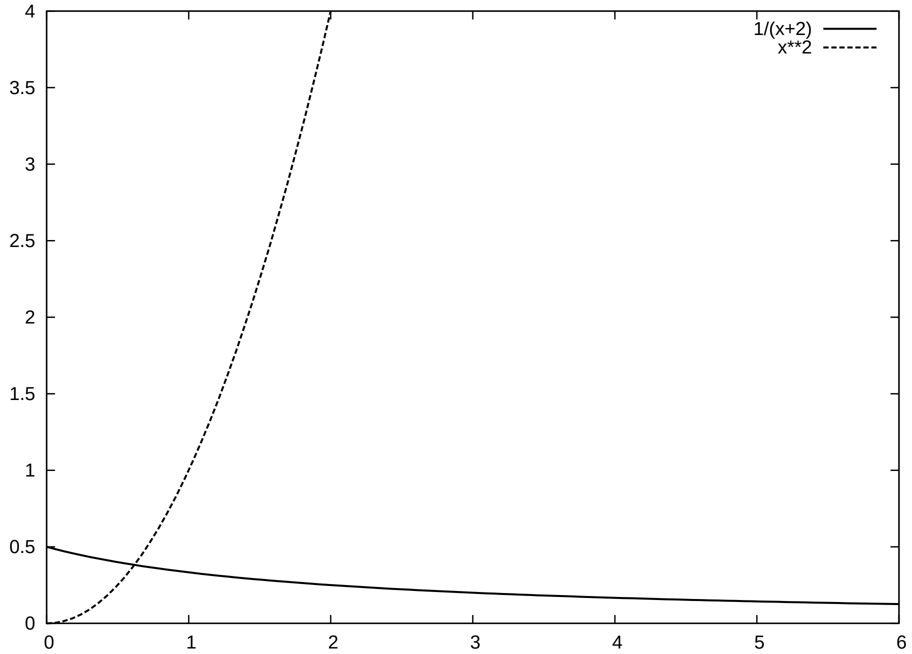
(ii) $B_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B_g = [-1, 1]$ und $B_h = (0, 1]$.

(iii)
1. $f \circ f(x) = x$, $f \circ h(x) = e^{x^2}$
2. $g \circ f(x) = \sin(1/x + \pi/4)$, $g \circ g(x) = \sin(\sin(x + \pi/4) + \pi/4)$, $g \circ h(x) = \sin(e^{-x^2} + \pi/4)$
3. $h \circ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $h \circ g(x) = e^{-\sin^2(x+\pi/4)}$, $h \circ h(x) = e^{-e^{-2x^2}}$

(iv)
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
2. $g(x)$ ist nicht konvergent für $x \to \pm\infty$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ f(x) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f \circ h(x) = \infty$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ f(x) = \sin(\pi/4) = \lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f(x)$
7. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g \circ g(x)$ existieren nicht
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} g \circ h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g \circ h(x) = \sin(\pi/4)$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} h \circ f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} h \circ f(x)$
10. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h \circ g(x)$ existieren nicht
11. $\lim\limits_{x \to +\infty} h \circ h(x) = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} h \circ h(x)$

Aufgabe P36 (Umkehrfunktionen und Verkettungen) Gegeben seien die Funktionen

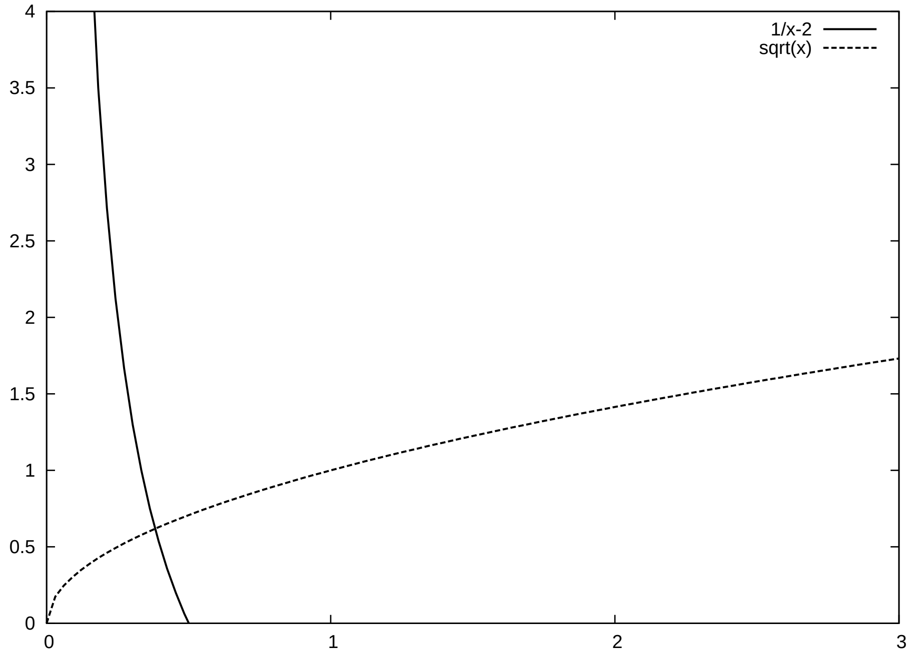
$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{mit } D_f = D_g = [0, +\infty).$$



(i)

(ii) $f(x)$ ist streng monoton fallend auf D_f: Wenn $x < y$, so ist $\frac{1}{x+2} > \frac{1}{y+2}$. $g(x)$ ist streng monoton wachsend auf D_g: Wenn $x < y$, so ist $y - x > 0$ und deshalb $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) > 0$, also $x^2 < y^2$. Deshalb sind auch beide Funktionen injektiv auf $D_f = D_g$.

Umkehrfunktionen: $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$, $g^{-1}(x) = \sqrt{2}$ mit $D_{f^{-1}} = (0, 1/2]$ und $D_{g^{-1}} = [0, +\infty)$.



(iii) $h(x) = f \circ g(x) = \frac{1}{x^2+2}$ ist streng monoton fallend. Wir bestimmen $h^{-1}(x)$:

$$\frac{1}{y^2+2} = x \Leftrightarrow y^2 + 2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{x} - 2}.$$

Also: $h^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$ mit $D_{h^{-1}} = (0, 1/2]$.

Aufgabe P37 (Grenzwerte)

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ existiert nicht.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, denn $|x \sin(1/x)| \leq |x| \to 0$ für $x \to 0$.