Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
St. Ehlen, K. Schwieger, N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 12. – 17.12.08

Mathematik I für MB
Ergebnisblatt

8. Übung

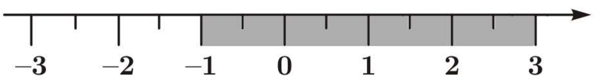
Wiederholungsaufgaben

Ungleichungen und Beträge

Aufgabe W12

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen? Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

(i) $|x-1| < 2$ is äquivalent zu $-1 < x < 3$. Skizze:



Hier sind die Grenzen des Intervalls nicht mit eingeschlossen!

(ii) $|x+2| \leq |x-1|$: es gibt 4 Fälle:

- 1. Fall: $x+2 \geq 0, x-1 \geq 0$, also $x \geq 1$ und

$$\begin{aligned} &x+2 \leq x-1 \\ &\Leftrightarrow 3 \leq 0 \quad \text{Widerspruch! - dieser Fall ist nicht möglich} \end{aligned}$$

- 2. Fall: $x+2 \geq 0, x-1 < 0$, also $-2 \leq x < 1$ und

$$x+2 \leq -x+1 \;\Leftrightarrow\; 2x \leq -1 \;\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

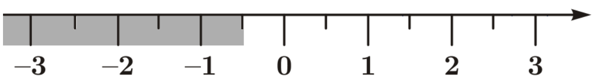
  Also $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

- 3. Fall: $x+2 < 0, x-1 \geq 0$, also $x < -2$ und $x \geq 1$ - das ist nicht möglich.
- 4. Fall: $x+2 < 0, x-1 < 0$, also $x < -2$ und

$$-x-2 \leq 1-x \;\Leftrightarrow -3 \leq 0.$$

  Also ist in diesem Fall die Ungleichung immer erfüllt.

Zusammenfassend ist die Ungleichung also erfüllt für $x \leq -\frac{1}{2}$. Skizze:



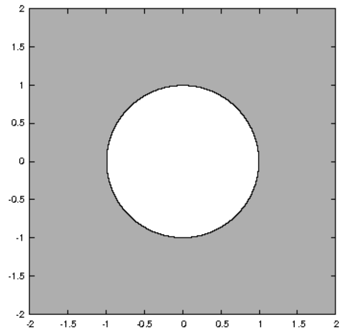
Hier gehört die Grenze $-1/2$ zum markierten Bereich hinzu und der markierte Bereich geht unendlich weit ins Negative weiter.

Aufgabe W13

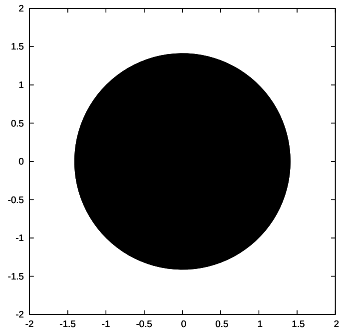
Skizzieren Sie jeweils für welche Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ folgende Ungleichungen gelten:

(i) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Die Punkte, für die $x^2 + y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt, liegen alle auf einem Kreis vom Radius $\sqrt{c}$. Also findet man folgendes heraus:

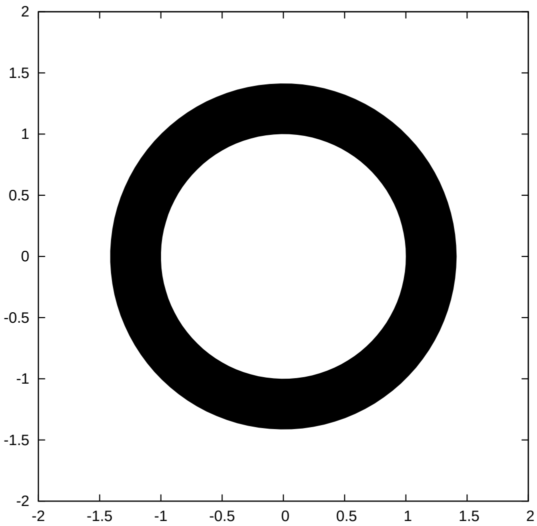
Die erste Ungleichung $1 \leq x^2 + y^2$ liefert das Äußere eines Kreises vom Radius 1 (der Rand des Kreises ist eingeschlossen), in der nebenstehenden Skizze grau markiert.



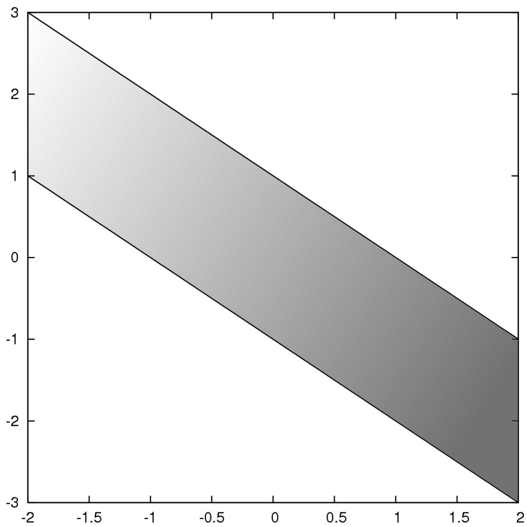
Die zweite Ungleichung $x^2 + y^2 \leq 2$ ergibt die Kreisfläche vom Radius $\sqrt{2}$, in der nächsten Skizze schwarz markiert.



Zusammen ergibt das den schwarzen Kreisring mit äußerem Radius $\sqrt{2}$ und innerem Radius 1.



(ii) $|x + y| \leq 1$:
Man erhält den Zwischenraum zwischen den beiden Geraden $y = -x - 1$ und $y = -x + 1$.



Präsenzaufgaben

Aufgabe P22

(i) $Spur(A) = 3, \quad \det(A) = 2$

(ii) $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Also ist $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.
Beachte: $p(\lambda) = \lambda^2 - Spur(A)\lambda + \det(A)$.

(iii) Zu lösen sind die zwei Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E_2)\vec{v_i} = \vec{0}$, für $i = 1, 2$.
Man erhält als Eigenvektoren $v_1 = (r, 0)^T$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und $v_2 = (3s, s)^T$ mit $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Als Fixgeraden ergeben sich:

$$g_1 : \vec{x} = r(1,0)^T,$$
$$g_2 : \vec{x} = s(3,1)^T.$$

Aufgabe P23
Das charakteristische Polynom von B ist

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda-2)) - 2((3-\lambda)-1) - 2 + \lambda \\
&= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24.
\end{aligned}$$

Man errät z.B. die erste Nullstelle $\lambda_1 = 2$ und errechnet mit Polynomdivision, dass

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 12).$$

Eigenwerte von B sind daher $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_2 = 6$. Die Eigenvektoren von B zu $\lambda_1 = 2$ berechnen sich durch Lösen des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Eigenvektoren von B zu $\lambda_2 = 6$ berechnen sich ebenso:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Schreibt man die drei Eigenvektoren $v_1 = (1,-1,0)^T, v_2 = (1,0,-1)^T$ und $v_3 = (1,2,1)^T$ in eine Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

so sieht man, dass $\det(V) \neq 0$. Damit sind v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig und die Matrix B ist diagonalisierbar. Man kann errechnen:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$V^{-1}BV = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Auf der Diagonale befinden sich die Eigenwerte von B. (Das war hier nicht verlangt, aber man kann es ja trotzdem machen, um sich zu überzeugen.)

Aufgabe P24

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische, invertierbare Matrix und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $r \leq n$ sämtliche Eigenwerte von A.

Behauptung: Die Eigenwerte von A^{-1} sind gegeben durch $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_r^{-1}$.
Beweis: Sei λ_i Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v_i \neq 0$, d.h. es gilt $Av_i = \lambda_i v_i$. Dann gilt, da A invertierbar ist:

$$v_i = \lambda_i A^{-1} v_i.$$

Also:

$$A^{-1} v_i = \frac{1}{\lambda_i} v_i.$$

Man beachte, dass der Eigenwert 0 nicht vorkommen kann, das A invertierbar ist. Dies zeigt, dass λ_i^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist.

(ii) Die obige Rechnung hat bereits gezeigt, dass alle Eigenvektoren von A auch Eigenvektoren von A^{-1} sind.

(iii) Wir wissen, dass die Eigenwerte von B gegeben sind durch $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 6$.
Also sind nach (i) die Eigenwerte von B^{-1} gegeben durch $\lambda_1^{-1} = \lambda_2^{-1} = 1/2$ und $\lambda_3^{-1} = 1/6$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind nach (ii) die gleichen wie die von B.