2. Übung Ealg. 2006

G1: Es sei G eine Gruppe. Zeige: Die Inversion $\iota : G \to G, x \mapsto x^{-1}$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn die Gruppe abelsch ist.

G2: Zeige, dass die folgenden Gruppen nicht isomorph sind:

1. Die Gruppe C_n der n-ten Einheitswurzeln $C_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ und die Gruppe C_m der m-ten Einheitswurzeln für $n \neq m$.
2. Die additiven Gruppen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$
3. $(\mathbb{R}, +, 0, -)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1, ^{-1})$

G4: Wir betrachten $\mathrm{Sym}\,(2, \mathbb{R})$, die Menge der reellen symmetrischen 2×2-Matrizen und auf dieser die Relation $A \sim B \leftrightarrow \exists S \in \mathsf{O}(2) : S^t A S = B$. Dabei ist $\mathsf{O}(2)$ die Gruppe der orthogonalen 2×2-Matrizen.

1. Zeige, daß dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Sym}\,(2, \mathbb{R})$ definiert wird, die mit der Operation $A \mapsto A^t$ verträglich ist, d.h. eine Kongruenz auf $(\mathrm{Sym}\,(2, \mathbb{R}), ^t)$.
2. Bestimme ein Repräsentantensystem. d.h, eine Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Sym}\,(2, \mathbb{R})$ von Matrizen so, dass es zu jedem $A \in \mathrm{Sym}\,(2, \mathbb{R})$ genau ein $B \in \mathcal{R}$ gibt mit $A \sim B$.

G5: Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:
1. Es gibt eine Gruppe, die zu einer ihrer echten Untergruppen isomorph ist.
2. Es gibt einen injektiven Homomorphismus von einer abelschen Gruppe in eine nicht-abelsche Gruppe.
3. Es gibt einen surjektiven Homomorphismus von einer abelschen Gruppe auf eine nicht-abelsche Gruppe.

H1:

1. Die Gruppe G werde von zwei Elementen $a, b \in G$ erzeugt, welche die folgenden Gleichungen erfüllen: $a^4 = b^2 = 1$ und $ab = ba^3$. Zeige, daß sich jedes Element von G schreiben läßt in der Form $a^i b^j$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $j \in \{0, 1\}$. Wieviele Elemente hat G mindestens, wieviele höchstens?
2. Zeige, daß die Matrizen
$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
die Relationen aus a) erfüllen. Wieviele Elemente hat die von ihnen erzeugte Untergruppe $D_4 := \langle a, b \rangle \subseteq GL_2(\mathbb{R})$? Deute das Ergebnis geometrisch!

H2: Gegeben seien eine Gruppe G und Elemente $g, h \in G$. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ und $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ als Gruppe mit

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),\ (0, 0),\ -(x, y) = (-x, -y)$$

1. Zeigen Sie: es gibt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ mit $\phi(1) = g$?

2. Welche Bedingung an g und h ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to G$ mit $\varphi(1,0) = g$ und $\varphi(0,1) = h$? Ist in diesem Falle φ durch g und h eindeutig bestimmt?

H3: Sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Definiere $x \sim x' \leftrightarrow \varphi(x) \approx \varphi(x')$ für $x, x' \in X$. Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

3. Übung Einf. Algebra TUD 2.11.06

G1 Kongruenz und Normalteiler. Aus der LA wissen wir, dass die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen eine Untergruppe G von $\mathsf{GL}(n, K)$ bilden. Für $A, B \in G$ sei definiert

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; a_{ii} = b_{ii} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenz auf G ist und geben Sie den zugehörigen Normalteiler N an.

G2 Direktes Produkt. Gegeben seien die Monoide A_i $(i = 1, \ldots, n)$. Zeigen Sie (exemplarisch für $i = 1$), dass für jedes i die Abbildung

$$\pi_i : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_i \quad \text{mit } \pi_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

ein surjektiver Homomorphismus ist und beschreiben Sie die Kernkongruenz von π_i.

G3 Ideale. Sei R ein Ring mit $1 \neq 0$. Welche der folgenden Untergruppen der additiven Gruppe $R \times R$ sind Ideale, welche sind Unterringe der Ringes $R \times R$?

$$A = \{(a, 0) \mid a \in R\}, \quad B = \{(a, a) \mid a \in R\}$$

G4 Wirkung und Ähnlichkeit. Durch welche der Vorschriften (a) bzw. (b) wird eine Wirkung von $\mathsf{GL}(n, K)$ auf $K^{n \times n}$ definiert?

$$(a) \;\; (S, A) \mapsto SAS^{-1}, \quad (b) \;\; (S, A) \mapsto S^{-1}AS$$

G5 Invariante Untergruppen. Sei eine Wirkung $(g, x) \mapsto gx$ der Gruppe G auf der Menge M gegeben und $X \subseteq M$. Wir definieren $gX = \{gx \mid x \in X\}$. Zeigen Sie

$H = \{g \in G \mid X = gX\}$ ist eine Untergruppe von G

G5 Affine Räume. Sei V die additive Gruppe eines Vektorraums. Ist eine Wirkung von V auf einer (Punkt)Menge $\mathcal{P}$ gegeben und gilt

- Zu $P, Q \in \mathcal{P}$ gibt es genau ein $v \in V$ mit $Q = v + P$ (d.h. die Wirkung ist scharf transitiv)

so spricht man von dem affinen Raum $(\mathcal{P}, V)$. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{P} = V$, so hat man einen affinen Raum (V, V) mit der Wirkung $(v, p) \mapsto v + p$

GH1 Affine Abbildungen. Sei $(\mathcal{P}, V)$ ein affiner Raum, $\dim V < \infty$. Eine Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heisse affin, wenn es einen Punkt O, Vektor v und lineare Abbildung ϕ_O so gibt dass

$$\phi(P) = v + \phi_O(p) + O \quad \text{wobei } P = p + O$$

Zeigen Sie

(a) Ist ϕ affine Abbildung, so sind bei gegebenem O, v und ϕ_O eindeutig bestimmt. Zudem gibt es gibt zu jedem Punkt O' einen Vektor v' und $\phi_{O'} \in \mathsf{End}(V)$ mit $\phi(P) = v' + \phi_{O'}(p') + O'$, $P = p' + O'$. Schliesslich ist ϕ_O unabhängig von der Wahl von O.

(b) Die affinen Abbildungen bilden ein Untermonoid M der Monoids aller Abbildungen von $\mathcal{P}$ nach $\mathcal{P}$.

(c) Durch $\phi \sim \psi \;\Leftrightarrow\; \phi_O = \psi_O$ wird eine Kongruenz auf M definiert.

(d) Die injektiven affinen Abbildungen bilden eine Untergruppe $\mathsf{Aff}(\mathcal{P}, V)$ von S_V.

(e) Schränkt man die Kongruenz aus (c) auf $\mathsf{Aff}(\mathcal{P}, V)$ ein, so hat man als den zugehörigen Normalteiler die Gruppe der Translationen. Debei ist τ eine Translation, wenn es $v \in V$ gibt so, dass $\tau(P) = v + P$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

H2 Kongruenz. Seien A, B Monoide, $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus und $\approx$ eine Kongruenzrelation auf B. Zeigen Sie, dass durch

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \phi(x) \approx \phi(y)$$

eine Kongruenzrelation auf A definiert wird.

H3 Direktes Produkt. Gegeben seien die Monoide A und A_i $(i = 1, \dots, n)$ und die Homomorphismen $\phi_i : A \to A_i$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\phi : A \to A_1 \times \ldots \times A_n$ gibt nit $\phi_i = \pi_i \circ \phi$ für $i = 1, \dots, n$.

H4 Ideale. a) Sei R ein Ring. Zeigen Sie: Durch

$$\sim \;\mapsto\; I_\sim = \{a \in R \mid a \sim 0\}$$

wird eine bijektive Abbildung der Menge der Kongruenzen von R auf die Menge der Ideale von R definiert. Wie sieht die Umkehrabbildung aus?
b) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie alle Ideale des Ringes $R \times R$.

H5 Wirkung und Kongruenz. Zeigen Sie, dass durch

$$(S, A) \mapsto SAS^t$$

eine Wirkung von $\mathsf{GL}(n, K)$ auf $K^{n \times n}$ gegeben wird.

H6 Invariante Teilmengen. Sei eine Wirkung $(g, x) \mapsto gx$ der Gruppe G auf der Menge M gegeben und $X \subseteq M$. Zeigen Sie

> Gilt $gx \in X$ für alle $x \in X$ und $g \in G$, so wird auf G eine Kongruenzrelation bestimmt durch
> $$g \sim h \;\Leftrightarrow\; gx = hx \text{ für alle } x \in X$$

Beschreiben Sie den zugehörigen Normalteiler.

H7 Metrischer affiner Raum. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $(\mathcal{P}, V)$ ein affiner Raum.
a) Zeigen sie: $\mathcal{P}$ wird zum metrischen Raum mit

$$d(P, Q) = |PQ| = \|v\| \text{ wobei } Q = v + P$$

b) Eine Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ist eine Bewegung, falls $|\phi(P)\phi(Q)| = |PQ|$ für alle P, Q Zeigen Sie: ϕ is Bewegung genau dann, wenn ϕ affin und $\phi_O \in \mathsf{O}(V)$, d.h. ϕ_O eine orthogonale Abbildung (Isometrie).

4. Übung Einf. Algebra TUD 9.11.06

G1 Permutationen. Geben Sie für die folgende Permutation $\sigma \in S_9$ die Zerlegung in disjunkte Zyklen an. Welche Ordnung haben die Zyklen in dieser Darstellung? Welche Ordnung hat σ? Geben Sie das Signum von σ und eine Darstellung als Produkt von Transpositionen an. Geben Sie die Inverse σ^{-1} als Produkt disjunkter Zyklen an. Welche Ordnung hat σ^{-1}?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

G2 Ordnung. Zeigen Sie: a) In einer Gruppe gilt $g^m = e$ genau dann, wenn m Vielfaches der Ordnung von g ist.
b) In der Gruppe S_n hat ein Produkt $\sigma = \sigma_k \circ \ldots \circ \sigma_1$ disjunkter Zyklen als Ordnung $\mathsf{ord}(\sigma)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zykellängen der σ_i.

G3 Ordnung und Index von Untergruppen. Nach U2H1 gibt es bis auf Isomorphie genau eine 8-elementige Gruppe D_4 mit Erzeugern d, s so, dass $d^4 = e = s^2$ und $sd = d^{-1}s$ und man kann diese als die Gruppe aller Drehungen und Spiegelungen verstehen, die ein gegebenes Quadrat in sich überführen. Welche Ordung und welchen Index haben die folgenden Untergruppen von D_4?

$$U_d = \mathsf{Spann}\{d\}, \quad U_s = \mathsf{Spann}\{s\}$$

G4 Bahnformel im Hexagon. a) Gegeben sei der ungerichtete Graph (V, E) mit Eckenmenge $V = \{1.2.3.4, 5, 6\}$ und Kantenmenge

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}\}$$

Sei $G = \mathsf{Aut}(V, E)$ die Automorphimengruppe dieses Graphen. Wie wirkt G auf V? Bestimmen Sie Bahn (Orbit) $G(1)$ und Standuntergruppe (Stabilisator) G_1 der Ecke 1. Bestimmen Sie die Ordnung $|G|$. Ist diese Wirkung treu?
b) G wirkt auch auf dem Menge der Diagonalen

$$\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$$

Was ist der Kern dieser Wirkung?

c) Sei

$$X = \{1, 3, 5\} \text{ und } H = \{g \in G \mid gX = X\}$$

Bestimmen sie $|H|$ mihilfe der Bahnformel und zeigen Sie $H \cong S_3$. Welche Gahnen hat die Wirkung von H auf V?

d) Welche Ordungen von Elementen aus G kommen vor?

e)* Wie klein darf eine Menge M sein, wenn es eine treue Wirkung dieser Gruppe G auf M geben soll?

G5 Cayley-Graph von S_3. Sei $d = (1\,2\,3)$ und $s = (1\,2)$. Zeigen sie $S_3 = \mathsf{Spann}\{d, s\}$ mit Lagrange und geben Sie den Cayley-Graphen von S bzgl. der Erzeugermenge $\{d, s\}$ an. Wie kann man die Relationen $d^3 = e$, $s^2 = e$ und $sd = d^2 s$ im Graphen ablesen?

H1 Konjugierter Zyklus. Überprüfen Sie: Für jedes $\sigma \in S_n$ und jeden Zyklus $\rho = (a_0\ a_1 \ldots a_{s-1})$ gilt

$$\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_0)\ \sigma(a_1) \ldots \sigma(a_{s-1}))$$

H2 Erzeugen der symmetrischen Gruppe. Die symmetrische Gruppe S_n wird von der Menge aller ihrer Transpositionen erzeugt, Zeigen Sie, dass auch jede der folgenden Mengen von Zyklen eine Erzeugermenge von S_n ist

a $(1\,2),\ (1\,3), \dots, (1\,n)$

b $(1\,2),\ (2\,3), \dots, (n-1\;n)$

c $(1\,2),\ (2\,3\ \dots n)$

d $(1\,n),\ (1\,2\ \dots n)$

H3 Alternierende Gruppe. Begründen Sie, dass die geraden Permutationen (d.h. die mit $\mathsf{sign}\,\sigma = 1$) einen Normalteiler A_n von S_n bilden. Sei $\tau \in S_n \setminus A_n$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ eine Bijektion von A_n auf $S_n \setminus A_n$ ist. Wieviele Element haben S_n bzw. A_n, d.h. was ist die Ordnung dieser Gruppen?

H4 Lagrange. Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe.Zeigen Sie:
a) Ist $|G| = p$, so ist $G = \mathsf{Spann}\{g\}$ für alle $g \neq e$ in G,
b) Ist $|G| = p^2$, so gibt es $a, b \in G$ mit $G = \mathsf{Spann}\{a, b\}$.

H5 Untergruppen von D_4. Welche Untergruppen hat D_4? Welche sind Normalteiler?

H6 Bahnformel im Prisma. Gegeben sei ein senkrechtes Prisma mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche z.B. mit den Eckpunktkoordinaten

$$(0,0,1),\ (1,-1,0),\ (1,1,0),\ (0,0,1),\ (1,-1,1),\ (1,1,1).$$

Sei G die Gruppe aller Bewegungen, die dieses Prisma invariant lassen. Skizzieren Sie das Prisma und nummerieren Sie die Ecken. Bestimmen Sie Orbits und Stabilisatoren der Wirkung von G auf der Menge der Ecken. Bestimmen Sie die Ordnung von G.

H7 Wirkung auf der Potenzmenge. Sei M eine endliche Menge und G eine Untergruppe von S_M. Dann wirkt G auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$ durch $\phi X = \phi(X)$.
a) Zeigen Sie: Ist $G = A_M$ die alternierende Gruppe,, so gilt für die Bahnen

$$G(X) = \{Y \mid Y \subseteq M,\ |Y| = |X|\}$$

b) Finde für $|M| = 4$ eine möglichst kleine Untergruppe G von A_M so, dass $G(X) = \{Y \mid Y \subseteq M,\ |Y| = |X|\}$ für alle $X \subseteq M$. * Nun auch für $|M| = 5.6, \dots$

H8* Petersengraph. Sei M eine 5-elementige Menge, V die Menge der 2-elementigen Teilmengen von M und für $X \subseteq M$

$$E = \{\{A.B\} \mid A, B \in V,\ |A \cup B| = 3\}$$

Zeichnen Sie den Graphen (V, E) und bestimmen sie die Ordnung seiner Automorphismengruppe $G = \mathsf{Aut}(V, E)$. Finden Sie eine möglichst kleine Menge M so, dass G eine treue Wirkung auf M besitzt. Ist G zu einer uns schon bekannten Gruppe isomorph?

5. Übung Einf. Algebra TUD 16.11.06

G1 Iterierte Bahnformel. Sei K ein endlicher Körper, $|K| = q$ und V ein 3-dimensionaler K-Vektorraum. Bestimmen Sie die Ordnung der Automorphismengruppe $G = \mathsf{Aut}(V) = \mathsf{GL}(V)$.

G2 Ziegelstein. Sei G die Drehgrupe eines Quaders mit 3 unterschiedlichen Kantenlängen. Bestimmen Sie die Bahnen und Standgruppen der Wirkung von G auf den Flächen. Bestimmen Sie die Ordnung von G. Geben Sie die Elemente von G und die Einteilung in Konjugiertenklassen an. Geben Sie das Zentrum $Z(G)$ von G an.

G3 Konjugation im Quadrat. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(D_4)$ und die Konjugiertenklassen von D_4.

G4 Orthogonale Gruppe. $\mathsf{O}(n)$ ist die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Geben Sie ein Repräsentantensystem unter Konjugation an. Zeigen Sie für $n = 2, 3$

- A und B konjugiert in $\mathsf{O}(n)$ $\Leftrightarrow$ $\det A = \det B$ und $\mathsf{Spur}(A) = \mathsf{Spur}(B)$.

H1 Symmetrischer Gruppen-Würfel. Geben Sie für die Konjugiertenklassen Grösse und Beschreinung der Elemente an. Geben Sie die entsprechende Beschreibung in der Drehgruppe des Würfels an. Welche Drehungen kommen auch beim Ziegelstein vor und wie sieht es für diese jeweils mit der Konjugiertheit aus? Bestimmen Sie die Normalteiler von S_4.

H2 Tetraeder. Sei G die Gruppe der Drehsymmetrien des Tetraeders. Bestimmen Sie die Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass G zur alternierenden Gruppe A_4 isomorph ist.

H3 Automorphes Quadrat. Welche Bahnen hat die Wirkung der Automorphismengruppe $G = \mathsf{Aut}(D_4)$ auf der Menge D_4? Welche Ordnung hat $\mathsf{Aut}(D_4)$? Welche Ordnungen haben die Elemente von $\mathsf{Aut}(D_4)$? Ist $\mathsf{Aut}(D_4)$ kommutativ? Wieviele innere Automorphismen von D_4 gibt es?

H4 Innerlichkeit. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: die Abbildung

$$\iota : G \to \mathsf{Aut}(G) \quad \iota(g)(x) = gxg^{-1} \ (x \in G)$$

ist ein Homomorphismus von G in $\mathsf{Aut}(G)$ und $\mathsf{Kern}(\iota) = Z(G)$.

H5 Untergruppen symmetrischer Gruppen. Zeigen Sie
a) Sind U, V Untergruppen von G mit $U \cap V = \{e\}$, so gilt $|\mathsf{Spann}(U \cup V)| \geq |U| \cdot |V|$.

b) Haben σ, ρ Ordnung 3 in S_4, so gilt entweder $\rho = \sigma^{\pm 1}$ oder $\mathsf{Spann}\{\sigma, \rho\} = A_4$

c) Hat σ Ordnung 3 und ρ Ordnung 4 in S_4, so gilt $\mathsf{Spann}\{\sigma, \rho\} = S_4$.

d) Hat σ Ordnung 4 und ρ Ordnung 5 in S_5, so gilt $\mathsf{Spann}\{\sigma, \rho\} = S_5$

6. Übung Einf. Algebra TUD 23.11.06

G1 Ergänzung. Auf dem Ring $\mathbb{Z}$ haben wird die Kongruenz $\equiv \mathsf{mod}\ n$ definiert durch

$$a \equiv b \ \mathsf{mod}\ n \ \Leftrightarrow \ n \text{ teilt } a - b$$

Sei $\pi : \mathbb{Z} \to K$ eine Faktorstruktur von $\mathbb{Z}$ modulo $\equiv \mathsf{mod}\ n$ und $\psi : \mathbb{Z} \to N$ eine Faktorstruktur von $\mathbb{Z}$ modulo $\equiv \mathsf{mod}\ m$.

a) Sei $n = 24$ und $m = 12$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\chi : K \to N$ gibt mit $\psi = \chi \circ \pi$.

b) Welche arithmetische Bedingung an n und m ist gleichbedeutend dazu, dass es einen Homomorphismus $\chi : K \to N$ gibt mit $\psi = \chi \circ \pi$?

G2 Abstraktion. Nach U1H4 kennen wir die Struktur 4-elementiger Gruppen: Jede solche Gruppe hat eine Gruppentafel wie in (a) oder wie in (b)

$$(a)\ \begin{array}{c|cccc} & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & a \\ c & c & b & a & e \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{c|cccc} & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & c & e & b \\ b & b & e & c & a \\ c & c & b & a & e \end{array}$$

Begründen Sie: Durch $K = \{2,4\}$ und $\pi(G) = \max\{\mathsf{ord}(g) \mid g \in G\}$ erhält man eine Abstraktion der Gesamtheit aller 4-elementigen Gruppen nach der durch $G \sim H \Leftrightarrow G \cong H$ gegebenen Äquivalenzrelation.

G3 Gespiegelter Dreh. Zeigen Sie: Ist ρ eine Drehung der Ebene und σ eine Spiegelung mit Achse durch das Zentrum von ρ, so gilt $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} = \rho^{-1}$

G4 Oktagon. D_8 bezeichne die Gruppe aller Symmetrien des regelmäßigen Achtecks.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von D_8.

b) Zeigen Sie, dass $D_8 = \mathsf{Spann}\{d, s\}$ mit passender Drehung d und Spiegelung s.

c) Verfizieren Sie, dass $d^8 = e = s^2$, $sd^k = d^{-k}s$ fúr alle k. Folgern Sie, dass man eine eindeutige Darstellug der Elemente von D_8 in der Form $d^k s^l$ hat mit $0 \leq k \leq 7$ und $l = 0, 1$.
d) Zeigen Sie, dass d^k und d^l genau dann konjugiert sind, wenn $d^l = d^{\pm k}$ und dass $d^k s$ und $d^l s$ genau dann konjugiert sind, wenn $k \equiv l \mathsf{\ mod\ } 2$. Beschreiben Sie die Konjugiertenklassen $K_1, \ldots, K_r$ von D_8 geometrisch und durch die Zykelstruktur bei der Wirkung auf den 8 Ecken - nummerieren Sie diese fortlaufend. Geben Sie für jede Konjugiertenklasse die Ordnung ihrer Elemente und die Elementanzahl an.

e) Geben Sie die Normalteiler von D_8 als Vereinigungen von Konjugiertenklassen an.

f) Für welche k gilt $D_8 = \mathsf{Spann}\{d^k, s\}$?

g) Wir betrachten Färbungen der Ecken des Achtecks mit 2 Farben. Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen äquivalenter Färbungen unter der Gruppe D_8.

H1 Bunter Würfel. Wir betrachten Färbungen der Flächen des Würfels mit 2 Farben. Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen äquivalenter Färbungen unter der Gruppe der Drehsymmetrien.

H2 Diedrische Ergänzung. Seien $d, s \in D_8$ nach G4b) bestimmt. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$\psi : D_8 \to \mathsf{GL}(2, \mathbb{R}) \text{ mit } \psi(d) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \ \psi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei nun K eine Gruppe und $\pi : D_8 \to K$ ein surjektiver Homomorphismus mit $\mathsf{Kern}(\pi) = \{e, d^4\}$. Zeigen Sie: Es gibt einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\chi : K \to \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ mit $\psi = \chi \circ \pi$ und χ ist injektiv.

H3 Produktive Abstraktion. Sei $\pi_i : M \to K_i$ $(i = 1, 2)$ Abstraktion nach der Äquivalenzrelation $\sim_i$. Sei $\sim$ definiert durch

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x \sim_1 y \text{ und } x \sim_2 y$$

Geben Sie eine Abstraktion $\pi : M \to K$ für $\sim$ an.

H4 Faktorstrukturen. Zeigen Sie, dass jede vierelementige Gruppe Faktorstruktur der Gruppe $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}^2$ ist, indem Sie dazu passende Kongruenzrelationen angeben.

H5 Affine Ergänzung. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $1+1 \neq 0$ in K. Sei $\mathsf{Aff}(\mathcal{P}, V)$ die Gruppe der bijektiven affinen Abbildungen des affinen Raums $(\mathcal{P}, V)$. Nach U3H1 haben wir zu $O \in \mathcal{P}$ einen surjektiven Homomorphismus

$$\Pi : \mathsf{Aff}(\mathcal{P}, V) \to \mathsf{GL}(V), \quad \Pi(\phi) = \phi_O$$

Sei $\Psi : \mathsf{Aff}(\mathcal{P}, V) \to C_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\mathcal{X} : \mathsf{GL}(V) \to C_2$ gibt mit $\mathcal{X} \circ \Pi = \Psi$. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

H6 Russellsche Antinomie.
a) Ist $\pi(G) = \{H \mid H \cong G\}$, $K = \{\pi(G) \mid G \text{ vierelementige Gruppe}\}$ eine konsistente Lösung von G2?
b) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Angenommen, die Gesamtheit aller n-elementigen Mengen sei eine Menge. Dann ist auch

$$\mathcal{X} = \{X \mid X \ n\text{-elementige Menge und } X \notin y \text{ für alle } y \in X\}.$$

eine Menge. Sei nun Y eine $n-1$ elementige Menge mit $\mathcal{X} \notin Y$ und sei $X = \{\mathcal{X}\} \cup Y$. Gilt $X \in \mathcal{X}$ oder gilt $X \notin \mathcal{X}$? Was schließen Sie daraus über den Status der Gesamtheit aller endlichen Mengen und über das angemessene Vorgehen, wenn man z.B. nach der durch $X \sim Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$ gegebenen Äquivalenzrelation abstrahieren will?

7. Übung Einf. Algebra TUD 30.11.06

H1 Homomorphie-Ergänzung bei der linearen Gruppen. Zeigen Sie: Die Matrizen A mit $\det A = 1$ bilden einen Normalteiler $\mathsf{SL}(n, K)$ der Gruppe $\mathsf{GL}(n, K)$ alle invertierbaren $n \times n$-Matrizen über den Körper K und jede Faktorgruppe $\mathsf{GL}(n, K)/\mathsf{SL}(n, K)$ ist zur multiplikativen Gruppe $K^\times$ von K isomorph.

H2 Faktorstruktur einer symmetischen Gruppe. Sei V der 4-elementige Normalteiler von S_4 und $\pi : S_4 \to H$ ein surjektiver Homomorphismus mit $\mathsf{Kern}(\pi) = V$. Sei

$$a = (1\,2\,3) \in S_4, \quad b = (1\,2) \in S_4$$

Welche interessanten Relationen erfüllen a und b in S_4? Welche interessanten Relationen erfüllen $\pi(a)$ und $\pi(b)$ in H? Was ist das Erzeugnis von $\pi(a)$ und $\pi(b)$ in H? Zu welcher bekannten Gruppe ist H isomorph?

9. Übung Einf. Algebra TUD 16.12.06

H2 Einheitswurzeln. Sei definiert

$$c_n = e^{2\pi i \frac{1}{p^n}}, \;\; C_{p^\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } z^{p^n} = 1\}$$

a) Zeigen Sie: C_{p^∞} ist die von den c_n, $(n \in \mathbb{N})$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ und es gilt $c_{n+1}^p = c_n$.
b) Zeigen Sie: Erzeugende und Relationen C_{p^∞} erhält man mit den Erzeugern $c_n \, (n \in \mathbb{N})$ und den Relationen

$$c_{n+1}^p = c_n, \;\; c_0 = 1$$

13, Übung Einf. Algebra TUD 25.1.07

G1 Abelscher Gruppenmix. Welche Gruppen sind isomorph zueinander?

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}24,\ \ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}3\mathbb{Z},\ \ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}/3(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}),\ \ (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})\times 3(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}))$$

H6 Semidirektes Produkt von Gruppen. Für Teilmengen X, Y einer Gruppe G sei definiert

$$X\cdot Y=\{x\cdot y\mid x\in X,\ y\in Y\}$$

G ist semidirektes Produkt des Normalteilers N und der Untergruppe U falls

$$N\cap U=\{e\},\ \ N\cdot U=G$$

a) Zeigen Sie, dass dann $U\cong G/N$ und dass jedes Element g von G eine eindeutige Darstellung hat in der Form

$$g=nu\ \text{ mit } n\in N,\, u\in U$$

b) Sei G affine Gruppe wie in U3GH1. Zeigen Sie: G ist semidirektes Produkt des Normalteilers N der Translationen und der Untergruppe U der Abbildungen mit gegebenem Fixpunkt O.

H7 Direktes Produkt von Gruppen. a) Seien N_1, N_2 Normalteiler der Gruppe G mit

$$(*)\ \ N_1\cap N_2=\{e\}\ \text{ und }\ N_1\cdot N_2=G$$

Zeigen Sie, dass G zu $G/N_1\times G/N_2$ isomorph ist.
b) Sei $G=G_1\times G_2$ und

$$N_1=G_1\times\{e\},\ \ N_2=\{e\}\times G_2$$

Zeigen Sie, dass N_1, N_2 Normalteiler von G sind und (*) erfüllen,
c) Seien U_1, U_2 Untergruppen der Gruppe G so, dass gilt

$$U_1\cap U_2=\{e\},\ \ U_1\cdot U_2=G,\ \ u_1u_2=u_2u_1 \text{ für alle } u_1\in U_1,\ u_2\in U_2$$

Zeigen Sie, dass man einen Isomorphismus hat

$$\phi: U_1\times U_2\to G\quad \text{mit } \phi((u_1,u_2))=u_1u_2$$

G1 Kongruenz und Normalteiler. Aus der LA wissen wir, dass die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen eine Untergruppe G von $\mathsf{GL}(n,K)$ bilden. Für $A, B\in G$ sei definiert

$$A\sim B\ \Leftrightarrow\ a_{ii}=b_{ii} \text{ für alle } i=1,\ldots,n$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Kongruenz auf G ist und geben Sie den zugehörigen Normalteiler N an.

!. Klausur Einf. Algebra TUD 21.11.06

1. Unterstrukturen und Erzeuger. Sei K ein Körper. J bestehe aus allen Matrizen $A=(a_{ij})\in K^{n\times n}$ mit

- $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und $a_{hk} = a_{ij}$ falls $j - i = k - h$

Zeigen Sie:
a) J ist eine K-Unteralgebra von $K^{n\times n}$ ist.
b) J wird als K-Algebra erzeugt von $\{E, N\}$, wobei E die Einheitsmatrix in $K^{n\times n}$ ist und $N = (n_{ij})$ die Matrix mit $n_{i\,i+1} = 1$ und $n_{ij} = 0$ für alle i und alle $j \neq i + 1$.
c) Für alle $l \leq n$ ist J_l ein Ideal von J, wobei

$$J_l = \{A = (a_{ij}) \in J \mid a_{1j} = 0 \text{ für alle } j \leq l\}$$

1. Substructures and generators. Let K be a field. J consists of all matrices $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ where

- $a_{ij} = 0$ for $i > j$ and $a_{hk} = a_{ij}$ if $j - i = k - h$

Prove the following:
a) J is a K-subalgebra of $K^{n\times n}$.
b) As a K-algebra, J is generated by $\{E, N\}$, where E is the unit matrix in $K^{n\times n}$ and $N = (n_{ij})$ the matrix with $n_{i\,i+1} = 1$ and $n_{ij} = 0$ for all i and all $j \neq i + 1$.
c) For all $l \leq n$, one has the ideal J_l of J where

$$J_l = \{A = (a_{ij}) \in J \mid a_{1j} = 0 \text{ for all } j \leq l\}$$

2. Produkte und Kongruenzen. Seien $(M_i, *_i, e_i)$ $(i = 1, 2)$ Monoide mit direktem Produkt $(M, *, e) = (M_1, *_1, e_1) \times (M_2, *_2, e_2)$. Für $i = 1, 2$ sei $\sim_i$ eine Kongruenzrelation von $(M_i, *_i, e_i)$ und sei auf M definiert

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \sim_1 y_1 \text{ und } x_2 \sim_2 y_2$$

a) Zeigen Sie: $\sim$ ist Kongruenzrelation von $(M, *, e)$
b) Für $i = 1, 2$ sei $\phi_i : (M_i, *_i, e_i) \to (M_i', *_i', e_i')$ Homomorphismus mit Kernkongruenz $\sim_i$. Geben Sie ein Monoid $(M', *', e')$ und einen Homomorphismus $\phi : (M, *, e) \to (M', *', e')$ so an, dass $\sim$ Kernkongruenz von ϕ ist.

2, Products and congruences. Let $(M_i, *_i, e_i)$ $(i = 1, 2)$ be monoids with direct product $(M, *, e) = (M_1, *_1, e_1) \times (M_2, *_2, e_2)$. For $i = 1, 2$ let $\sim_i$ be a congruence relation of $(M_i, *_i, e_i)$. Define on M

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \sim_1 y_1 \text{ and } x_2 \sim_2 y_2$$

a) Show that $\sim$ is congruence relation of $(M, *, e)$
b) For $i = 1, 2$, let $\phi_i : (M_i, *_i, e_i) \to (M_i', *_i', e_i')$ be a homomorphism with kernel congruence $\sim_i$. Construct a monoid $(M', *', e')$ and a homomorphism $\phi : (M, *, e) \to (M', *', e')$ such that $\sim$ is the kernel congruence of ϕ.

3. Hexagon. D_6 bezeichne die Gruppe aller Symmetrien des regelmäßigen Sechsecks.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von D_6.

b) Wählen Sie eine Drehung d und eine Spiegelung s so, dass $D_6 = \mathsf{Spann}\{d, s\}$. Diese d und s werden im Folgeden betrachtet.

c) Verifizieren Sie, dass $d^6 = e = s^2$, $sd^k = d^{-k}s$ fúr alle k. Folgern Sie, dass man eine eindeutige Darstellug der Elemente von D_6 in der Form $d^k s^l$ hat mit $0 \leq k \leq 5$ und $l = 0, 1$.

d) Zeigen Sie, dass d^k und d^l genau dann konjugiert sind, wenn $d^l = d^{\pm k}$ und dass $d^k s$ und

$d^l s$ genau dann konjugiert sind, wenn $k \equiv l \ \mathsf{mod}\ 2$. Beschreiben Sie die Konjugiertenklassen $K_1, \ldots, K_r$ von D_6 geometrisch und durch die Zykelstruktur bei der Wirkung auf den 6 Ecken - nummerieren Sie diese fortlaufend. Geben Sie für jede Konjugiertenklasse die Ordnung ihrer Elemente und die Elementanzahl an.

e) Bestimmen Sie die Normalteiler von D_6 und geben Sie sie als Vereinigungen von Konjugiertenklassen an.

f) Für welche k gilt $D_6 = \mathsf{Spann}\{d^k, s\}$?

g) Sei H die von $\{d^3, s\}$ erzeugte Untergruppe. Bestimmen Sie Bahnen den Wirkung von H auf der Menge der Ecken und den Stabilisator H_1 der Ecke 1. Bestimmen Sie den Isomorphietyp der H_k für $k = 2, \ldots, 6$.

h) Wir betrachten Färbungen der Ecken des Sechsecks mit 2 Farben. Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen äquivalenter Färbungen unter der Gruppe D_6.

3. Hexagon. D_6 denotes the group of all symmetries of the regular hexagon.

a) Determine the order of D_6.

b) Choose a rotation d and a reflection s such that $D_6 = \mathsf{Spann}\{d, s\}$. These d and s will be considered in the following.

c) Verify that $d^6 = e = s^2$, $sd^k = d^{-k}s$ for all k. Derive that one has for the elements of D_6 a unique representation in the form $d^k s^l$ with $0 \leq k \leq 5$ and $l = 0, 1$.

d) Show that d^k and d^l are conjugate if and only if $d^l = d^{\pm k}$ and that $d^k s$ and $d^l s$ are conjugate if and only if $k \equiv l \ \mathsf{mod}\ 2$. Describe the conjugation classes $K_1, \ldots, K_r$ of D_6 both geometrically and in terms of the cycle structure under the action on the 6 vertices - number these in row. Determine for each conjuation class the order of its members and the size of the class.

e) Determine all normal subgroups of D_6 and represent them as unions of conjugation classes.

f) For which k has one $D_6 = \mathsf{Spann}\{d^k, s\}$?

g) Let H be the subgroyp of D_6 generated by $\{d^3, s\}$. Determine the orbits of the action of H on the set of vertices and the stabilizer H_1 of the vertex 1. Determine the isomorphism type of the H_k for $k = 2, \ldots, 6$.

h) We consider the colouring of the vertices of the hexagon with 2 colours. Determine the number of orbits of equivalent colourings under the action of the group D_6.

2. Klausur Einf. Algebra TUD 20.12.06

1 Erzeugte Kongruenz und Homomorphiergänzung. Gegeben seien Homomorphismen der additiven Gruppen

$$\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$\pi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to K$ surjektiv mit $\mathsf{Kern}(\pi)$ die feinste Kongruenz mit $(16, 16) \sim (0, 0)$, $(27, 42) \sim (3, 2)$.

Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $\chi : K \to A$ gibt mit $\chi \circ \pi = \psi$.

1 Generating congruences and diagram completion. Given the homomorphisma of additive groups

$$\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K$ surjective with $\mathsf{Kern}(\pi)$ generated by $(16, 16) \sim (0, 0)$, $(27, 42) \sim (3, 2)$.

Show that there is a unique homomorphism $\chi : K \to A$ with $\chi \circ \pi = \psi$.

2 Faktorisierung. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G so, dass

$$aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \text{für alle } a, b \in G$$

Zeigen Sie, dass die durch Faktorisierung entstandene Gruppe G/N kommutativ ist.

2 Factorisation. Let G be a group and N a normal subgroup of G such that

$$aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \text{for all } a, b \in G$$

Show that factorisation yields a commutative group G/N.

3. Klausur Einf. Algebra TUD 2.2.07

6: Isomorphie. Welche Gruppen sind isomorph?

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2,\ \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

6: Isomorphy. Which groups are isomorphic?

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2,\ \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

Semestralklausur Einf. Algebra TUD 22.2.07

1. Äquivalenzrelationen. Für Relationen α und β auf der Menge M ist die Komposition $\alpha \circ \beta$ definiert durch

$$a\,(\alpha \circ \beta)\,b \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } c \text{ mit } a\,\alpha\,c \text{ und } c\,\beta\,b$$

Zeigen Sie:
a) Eine reflexive und symmetrische Relation α auf M ist Äquivalenzrelation genau dann, wenn $\alpha \circ \alpha = \alpha$.

b) Sind α und β reflexiv, so auch $\alpha \circ \beta$

c) Sind α und β symmetrisch, os ist $\alpha \circ \beta$ genau dann symmwetrisch, wenn $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$

d) Sind α und β Äquivalenzrelationen auf M, so ist $\alpha \circ \beta$ genau dann Äquivalenzrelation auf M, wenn $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

2. Symmetriegruppe eines Prismas. Sei G die Gruppe aller Drehsymmetrien eines senkrechten Prismas mit einem regelmäßigen Siebeneck als Grundfläche. Z.B. die Koordinaten der Ecken $(\cos k\frac{2\pi}{7}, \sin k\frac{2\pi}{7}, \pm 1)$.

a) Bestimmen Sie die Elementanzahl von G und die Bahnen unter der Wirkung auf der Menge der Flächen.

b) Zeigen Sie, dass G zur Diedergruppe D_7 ismorph ist.

c) Welche Elementzahlen können die Konjugiertenklassen von G haben? Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen.

d) Wieviele verschiedene Färbungen der Flächen des Prismas mit 2 Farben gibt es?

3. Fixpunkte und Primzahlordnung. a) Sei X eine endliche Menge und $\sigma \in S_X$ von Primzahl-Ordnung p. Welche Längen können bei der Zykelzerlegung von σ auftreten? Zeigen Sie

$$|\{x \in X \mid \sigma(x) = x\}| \equiv |X| \bmod p$$

b) Sei G eine Gruppe und $n > 1$. Sei

$$X = \{(g_1, \ldots, g_n)) \mid g_1 \cdots g_n = e\}, \quad \sigma((g_1, \ldots, g_n) = (g_2, \ldots g_n, g_1)$$

Charakterisieren Sie die Menge der Fixpunkte von σ.

c) Sei G eine endliche Gruppe und p ein Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie

$$|\{g \in G \mid \mathsf{ord}(g) = p\}| \equiv -1 \mathsf{\ mod\ } p$$

4. Freiheit und Gleichheit. Charakterisieren Sie die freie von $\{a_1, a_2, a_3\}$ erzeugte Struktur F in der Klasse der additive geschriebenen kommutativen Monoide mit $5x = 3x$ durch eine eindeutige Darstellung ihrer Elemente und als ein direktes Produkt von Monoiden mit je einem Erzeuger.

Vordiplom F2007

3.1 Symmetriegruppe einer Doppelpyramide. (16P) Sei G die Gruppe aller Drehsymmetrien einer Doppelpyramide, die aus zwei kongruenten Pyramiden mit regelmäßigem Fünfeck als Grundfläche zusammengesetzt ist. Seien a, b die Pyramidenspitzen. Z.B. a, b mit Koordinaten $(0, 0, \pm 1)$, Ecken c_k $(k = 0, \ldots, 4)$ der Grundfläche mit $(\cos k\frac{2\pi}{5}, \sin k\frac{2\pi}{5}, 0)$.

a) Zu welche bekannten Gruppe ist der Stabilisator G_a isomorph?

b) Bestimmen Sie die Bahnen unter der Wirkung von G auf der Menge der Ecken und die Elementanzahl $|G|$.

c) Geben Sie eine möglichst kleine Erzeugermenge von G an und beschreiben Sie G dann durch Relationen.

d) Geben Sie G_a durch Terme in den Erzeugern an und zeigen Sie, dass die Wirkung von G_a auf G durch Konjugation treu ist.

e) Bestimmen Sie die Bahnen der Wirkung von G_a auf G durch Konjugation.

f) Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen und die Normalteiler von G.

g) Wieviele nicht-äquivalente Färbungen der Flächen der Doppelpyramide mit 2 Farben gibt es?

4.3 Endliche Gruppen ebener Bewegungen.(37P) Hinweis: Sie können hier algebraisch und/oder geometrisch argumentieren. Es gilt: Jede endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ ist zyklisch.

a) Zeigen Sie: Eine endliche Untergruppe G der ebenen orthogonalen Gruppe $\mathsf{O}(2)$ ist entweder zyklisch oder isomorph zu einer Diedergruppe D_n.

b) Sei H eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & O \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & a_{11} & a_{12} \\ t_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in H$$

bilden eine Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe $\mathsf{GL}(3, \mathbb{R})$. Ist $H = \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$, so heißt $G = \mathsf{Aff}(2, \mathbb{R})$ ebene affine Gruppe; ist $H = \mathsf{O}(2)$, so heißt $G = \mathsf{B}(2)$ Gruppe der ebenen Bewegungen.

c) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathsf{Aff}(2, \mathbb{R})$ wirkt durch Matrixmultiplikation auf der Menge $\mathcal{P} =$

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & O \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & O \\ \boldsymbol{x} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & O \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ \boldsymbol{x} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

d) Sei F eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe $\mathsf{Aut}(V)$ des Vektorraums V, sei $v \in V$ und

$$w = \sum_{\phi \in F} \phi(v). \quad \text{Zeigen Sie: } \psi(w) = w \quad \text{für alle } \psi \in F$$

e) Seien H und G wie in b). Zeigen Sie: Jede endliche Untergruppe von G ist isomorph zu einer Untergruppe von H.

f) Bestimmen Sie alle endlichen Untergruppen von $\mathsf{B}(2)$ bis auf Isomorphie.

g) Wie und warum kann man $\mathsf{B}(2)$ als Gruppe aller Bewegungen in einer Ebene auffassen?

4.5 Zyklische Gruppen und Isomorphiesätze.(22P) Eine Untergruppe U einer abelschen Gruppe A ist maximal, falls $U \neq A$ und es keine Untergruppe $V \supseteq U$ mit $V \notin \{U, A\}$ gibt. Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit $|A| > 1$. Zeigen Sie:
a) A besitzt mindestens eine maximale Untergruppe.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent: (i) A ist zyklisch und es gibt eine Primzahl p und $n > 0$ mit $|A| = p^n$. (ii) A besitzt genau eine maximale Untergruppe. Hinweis: Man kann man wieder den Struktursatz benutzen, muss aber nicht.

Vordiplom H 2007 Aufgabe 8: Gruppenwirkungen. (10 P). Sei K der Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $G = \mathsf{GL}(2, K)$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen über K.

a) Bestimmen Sie die Ordung von G.

b) G wirkt auf der Menge $K^{2\times 2}$ aller 2×2-Matrizen über K durch $(S, X) \mapsto SXS^{-1}$ Bestimmen Sie den Stabilisator G_A von A und die Elementanzahl der Bahn $G(A)$ von A für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Semestralklausur 2006

A5: Sei $\mathbb{Z}_3$ der 3-elementige Körper. Wieviele Elemente hat die Gruppe $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$ der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{Z}_3$? Sei $U = \{A \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_3) \mid A^4 = E\}$. A und B sind äquivalent, $A \sim B$, genau dann, wenn es $S \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$ gibt mit $B = SAS^{-1}$.

Zeigen Sie: Aus $A \in U$ und $A \sim B$ folgt $B \in U$. Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen von Matrizen $A \in U$ an. Bestimmen Sie für jede Matrix A aus Ihrem Repräsentantesystem den Zentralisator

$$C_{\mathsf{GL}(2,\mathbb{Z}_3)}(A) = \{S \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_3) \mid SA = AS\}$$

und die Elementanzahl der Äquivalenzklasse von A. Bestimmen Sie die Elementanzahl von U. Ist U eine Untergruppe von $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$? Gilt $AB = BA$ für alle $A, B \in U$?

A6: Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen G mit

$$|G| = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

A7: Sei G die Symmetriegruppe des regulären Sechseckes. Bezeichnen Sie die Ecken des regulären Sechseckes im Uhrzeigersinn mit a, b, c, d, e, f.

1. Berechnen Sie die Ordnung von G, indem Sie die Ordnung der Standgruppe G_a und die Bahnlänge $|G(a)|$ bestimmen.

Bezeichnen Sie mit $G_{\{a,c,e\}}$ diejenige Untergruppe von G, die die Menge $\{a, c, e\}$ invariant läßt.

2. Berechnen Sie die Ordnung von $G_{\{a,c,e\}}$, indem Sie die Ordnung der Standgruppe $(G_{\{a,c,e\}})_a$ und die Bahnlänge $|G_{\{a,c,e\}}(a)|$ bestimmen.

3. Beweisen Sie, daß $G_{\{a,c,e\}}$ isomorph zur Symmetriegruppe des regulären Dreiecks ist.

Bezeichnen Sie mit τ die Symmetrie mit $a \mapsto b \mapsto c \mapsto d \mapsto e \mapsto f \mapsto a$.

4. Beweisen Sie, daß G ein semidirektes Produkt von G_a und $\langle\tau\rangle$ ist.

5. Beweisen Sie, daß G ein direktes Produkt von $G_{\{a,c,e\}}$ und $\langle\tau^3\rangle$ ist.

Vordiplom F 2006

2: Permutationen. (3P) Sei σ die Permutation der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mit

$$\sigma(i) = i + 2 \ (i < 6), \ \sigma(6) = 2, \ \sigma(7) = 1.$$

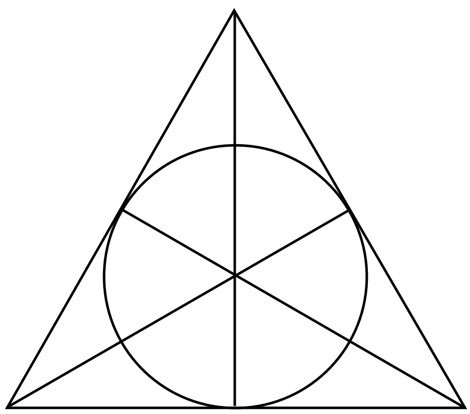
Geben Sie jeweils die Zykeldarstelllung und das Signum von σ, σ^2 und σ^{-1} an.

18: Unterguppen abelscher Gruppen. (15P) Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $G = A \oplus B$. Zeigen Sie: Die Ordnungen von A und B sind genau dann teilerfremd, wenn $U = (A \cap U) + (B \cap U)$ für jede Untergruppe U von G.

24: Lineare Gruppen. (30P) Zeigen Sie: a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Die Ordnung von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ ist gleich der Anzahl von Tripeln linear unabhängiger Vektoren aus $\mathbb{F}_2^3$.
c) Die Ordnung von $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ ist gleich 168. Berechnen Sie dazu einerseits die Anzahl aus Teil b), benutzen Sie andererseits die Bahnformel bezüglich der üblichen Wirkung von $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ auf $V = \mathbb{F}_2^3$:

$$G \times V \to V : (A, x) \mapsto Ax.$$

d) Das Bild zeigt die Fano-Ebene, welche aus der Punktmenge P (die sieben Schnittpunkte jeweils dreier Geraden bzw. Geraden mit dem Kreis) und der Geradenmenge L (sechs Geraden und ein Kreis) besteht.



1. Zeigen Sie, dass die Fano-Ebene genau 168 Automorphismen besitzt. (Es gibt Automorphismen, die den Kreis auf eine Gerade abbilden und umgekehrt!)

2. Geben Sie eine treue Wirkung von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ auf der Fano-Ebene an.
Hinweis: Beschriften Sie die sieben Punkte der Fano-Ebene mit den nichttrivialen Vektoren von $\mathbb{F}_2^3$, so dass an den jeweiligen Geraden und dem Kreis drei linear abhängige Vektoren stehen.

3. Argumentieren Sie, dass die Automorphismengruppe der Fano-Ebene isomorph zu $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ ist.

4. Geben Sie eine Untergruppe der Ordnung 21 von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ an — nach Wahl als Matrizen oder als Automorphismen der Fano-Ebene — und bestimmen Sie ihren Isomorphietyp.

25: Freie Gruppen. (20P) Zeigen Sie, dass eine Untergruppe einer freien Gruppe frei ist. Hinweis: Betrachten Sie den Cayley-Graphen $\mathrm{Cay}(G, X)$ einer auf X freien Gruppe G.

26: Wirkungsvolle Anwendung. (15P) Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $D(n) := \{d \mid d \in \mathbb{N}, d \text{ teilt } n\}$ die Menge aller Teiler von n. Sei $C_2 = \{1, -1\}$ die Gruppe mit zwei Elementen. Zeigen Sie:
a) Die Gruppe C_2 wirkt auf $D(n)$ vermöge

$$C_2 \times D(n) \to D(n) : \begin{cases} (1, d) \mapsto d, \\ (-1, d) \mapsto \frac{n}{d}. \end{cases}$$

b) $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Quadrat, wenn die Kardinalität von $D(n)$ ungerade ist.

27: Bahnen. (20P) Sei $\phi : G \times X \to G$ eine Wirkung einer endlichen Gruppe G auf einer endlichen Menge X. Bezeichne mit $X_g := \{x \in X \mid gx = x\}$ die Menge aller Fixpunkte des Elementes g und mit $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ den Stabilisator des Elementes x. Zeigen Sie:
a) $\sum_{g\in G} |X_g| = \sum_{x\in X} |G_x|$.
b) Die Anzahl der Bahnen von G auf X ist $\sum_{x\in X} |G(x)|^{-1}$.
c) Die Anzahl der Bahnen von G auf X ist $\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |X_g|$.
Hinweis zu c): Ersetzen Sie $\sum_{g\in G} |X_g|$ durch $\sum_{x\in X} |G_x|$ nach Teilaufgabe a) und verwenden Sie die Bahnformel.

Automorphismengruppe eines Graphen. Ein Mühlebrett kann man als (symmetrischen) Graphen Γ auffassen (die Ecken sind die erlaubten Positionen der Steine). Sei G die Automorphismengruppe von Γ.

1. Bestimmen Sie die Bahnen von G unter der Wirkung auf Γ.

2. Bestimmen Sie die Ordnung von G.

3. Geben Sie einen Isomorphismus von G auf ein direktes Produkt möglichst kleiner Gruppen an.

4. Ist G ein direktes Produkt von echten Untergruppen? Wenn ja, wie?

5. Ist G ein semidirektes Produkt von echten Untergruppen? Wenn ja, wie?

1.Übung zur Einführung in die Algebra II

1. Gruppentafel. Bezeichen D_4 (manche sagen D_8) die Symmetriegruppe des Quadrats. Schreiben Sie D_4 als ein Erzeugnis einer Drehung d und einer Spiegelung s auf, und geben Sie die Multiplikation in Form einer (Gruppen)Tafel an.

2. Kleine Gruppen. Bestimmen Sie bis auf Isomorphe alle Gruppen von Ordnung ≤ 6. Welche sind kommutativ, welche zyklisch? Bestimmen Sie jeweils konkret alle Untergruppen dieser Gruppen. Hinweis: Der Satz von Lagrange ist hier von Nutzen.

3. Entgegengesetzte Gruppe. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Definiere

$$g * h = h \cdot g \qquad \text{für alle } g, h \in G$$

a) Zeigen Sie, dass dann auch $(G, *)$ eine Gruppe ist, die zu $(G, \cdot)$ entgegengesetzte. Wie verhalten sich die Neutralelemente bzw die Inversionen beider Gruppen zeinander?

b) Zeigen Sie: jede Gruppe ist zu ihrer entgegengesetzten isomorph.

c) Zeigen Sie: Eine Gruppe, in der $g^2 = e$ für alle g gilt, ist kommutativ.

4. Erzeugen. Seien U, V Untergruppen der Gruppe G. Zeigen Sie:

$$\{u_1 \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot v_n \mid n \in \mathbb{N},\ u_i \in U,\ v_i \in V\}$$

ist die von $U \cup V$ erzeugte Untergruppe.

5. Erzeugen linearer Gruppen a) Sei K ein Körper. Stellen Sie die folgenden Matrizen aus $\mathsf{SL}(2, K)$ als Produkt elementarer Scherungsmatrizen dar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \; r \neq 0$$

b) Sei U eine Untergruppe von $K^\times$. Zeigen Sie, dass

$$G = \{A \in \mathsf{G}L(n, K) \mid \det A \in U\}$$

eine Untergruppe von $\mathsf{GL}(n, K)$ ist und von den in ihr enthaltenen Elementarmatrizen erzeugt wird.

6. Würfelgruppe. Bestimmen Sie mithilfe der Bahnformel die Ordnung der Drehsymmetriegruppe H des Würfels. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ die einzige Rechts- wie Linksnebenklasse von H in der vollen Symmetriegruppe G des Würfels ist. Wieviel Elemente hat G? Zeigen Sie, dass H zu S_4 isomporph ist, indem Sie eine treue Wirkung auf einer passenden 4-elementigen Menge finden.

7. Kürzbare Monoide. Eine Menge H mit assoziativer Multiplikation und Neutralelement e heisst ein Monoid und links kürzbar, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$$

a) Zeigen Sie, dass jedes endliche links kürzbare Monoid eine Gruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass ein kommutatives Monoid genau dann (links) kürzbar ist, wenn es sich in eine abelsche Gruppe einbetten kässt.

8: Diedergruppen. D_n bezeichne die volle Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks. Sei $n = 4$ bzw. $n = 5$. Charakerisieren Sie die Klassen konjugierter Elemente von D_n. Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Klassen konjugierter Untergruppen an.

9: Erzeugen. Seien U und V Untergruppen von G mit $U \cap V = \{e\}$. Zeigen Sie, dass die von $U \cup V$ erzeugte Untergruppe mindestens $|U| \cdot |V|$ viele Elemente hat.

10: Alternierende Gruppen. Bestimmen Sie die Klassen konjugierter Untergruppen von A_4. Wieviele Elemente der Ordnung 3 bzw. 5 gibt es in A_5? Hat A_5 eine Untergruppe von Ordnung 30? Welche Untergruppen von A_5 können von $\{\sigma, \rho\}$ mit σ von Ordnung 5, ρ von Ordnung 3 erzeugt werden?

11: Dodekaedergruppe. Bestimmen Sie die Anzahl der Drehsymmetrien des regelmäßigen Dodekaeders. Zeigen Sie, dass die Gruppe der Drehsymmetrien zu A_5 isomorph ist. Hinweis: Die Gruppe wirkt auf der Menge der 5 durch die Ecken des Dodekaeders gebildeten Würfel.

12: Symmetrische Gruppen. Bestimmen Sie ein Repräsentantesystem für die Klassen konjugierter Untergruppen von S_4. Zeigen Sie, dass S_n durch ein passendes Paar bestehend aus einer Transposition und einem n-Zyklus erzeugt wird.

13: Wirkungen. G wirke auf M. Zeigen Sie, dass G dann auch auf natürliche Weise auf M^2 und auf $\mathcal{P}(M)$ wirkt. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Was muss gelten, damit man eine natürliche Wirkung von G auf der Faktormenge $M/\sim$ erhält? Sei $\psi : H \to G$ ein Homomorphimus. Zeigen Sie, dass man eine Wirkung von H auf M erhält durch

$$h(x) = (\psi(h))(x)$$

14: Stabilisator einer Menge. Sei eine Wirkung von G auf M gegeben. Für eine Teilmenge $\{a_1, \dots a_k\}$ von M bezeichne

$$G_{a_1,\dots,a_k} = \{g \in G \mid g(a_i) = a_i (i = 1, \dots k)\}$$

den punktweisen Stabilisator einer Teilmenge. Zeigen Sie

$$|G| = |G(a_1)| \cdot |G_{a_1}(a_2)| \cdot |G_{a_1,a_2}(a_3)| \cdot \dots |G_{a_1,\dots,a_{k-1}}(a_k)|| \cdot |G_{a_1,\dots,a_k}|$$

15: Automorphismen von Graphen. Ein (ungerichteter schlichter) Graph ist eine Menge V (von Ecken) zusammen mit einer Menge E von zweielementigen Teilmengen (Kanten) von V - alternativ: E ist eine symmetrische, irreflexive Relation auf V, die angibt, ob zwei Ecken durch eine Kante verbunden sind. Ein Automorphismus des Graphen ist eine Permutation ϕ von V so, dass $\{a, b\} \in E$ genau dann, wenn $\{\phi(a), \phi(b)\} \in E$. Der Petersengraph hat als V die Menge der zweielementigen Teilmengen einer gegebenen 5-elementigen Menge. Zwei solche Ecken sind durch eine Kante verbunden, wenn ihr Schnitt nicht leer ist. Zeichnen Sie diesen Graphen und bestimmen Sie die Anzahl der Automorphismen. Zeigen Sie, dass die Automorphismen eine zu S_5 isomorphe Gruppe bilden.

16: Wirkung der speziellen linearen Gruppe. Die Gruppe $\mathsf{SL}(n, K)$ wirkt auf $K^{n\times m}$ durch Multiplikation von links. Geben Sie ein Repräsentantensystem an. Hinweis: Satz 3.12 und Determinanten können benutzt werden.

17: Normalteiler. Zeigen Sie: eine Untergruppe N von G ist genau dann Normalteiler, wenn $gN \subseteq Ng$ für alle $g \in G$.

18: Semidirektes Produkt. Sei N Normalteiler von G , U Untergruppe von G, $N \cap U = \{e\}$ und G von $N \cup U$ erzeugt. Zeigen Sie, dass G/N zu U isomorph ist.

19: Quaterionengruppe. Sei Q die von

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathsf{GL}(2, \mathbb{C})$. Bestimmen Sie die Untergruppen von Q. Welche sind Normalteiler? Geben Sie für die Faktorgruppen, sofern möglich, einen Isomorphismus auf ein direktes Produkt zyklischer Gruppen an.

20: Orthogonale Gruppen. Zeigen Sie: $\mathsf{O}(n)$ hat eine Untergruppe H der Ordnung 2 so, dass $\mathsf{O}(n) = \mathsf{SO}(n) \cdot H$. Genau dann kann man H so wählen, dass man ein direktes Produkt erhält, wenn n ungerande ist.

21: Kreisgruppe. Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{R}, +)$ zu der Untergruppe $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ von $\mathbb{C}^\times$ isomorph ist. Zeigen Sie, dass die Untergruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gerade aus den Elementen endlicher Ordnung besteht und dass jede ihrer endlich erzeugten Untergruppen eine endliche zyklische Gruppe ist. Welche Gruppe erhält man, wenn $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nach einer dieser endlichen Untergruppen faktorisiert?

22: Polarkoordinaten. Zeigen Sie: die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ ist direktes Produkt ihrer Untergruppen $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\mathbb{R}_{>0}$.

23: Produktzerlegung. Welche der Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (p prim), $(\mathbb{Q}, +)$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sind direktes Produkt zweier echter Untergruppen?

24: Affine Gruppe. Eine affine Matrix ist von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} \quad \text{mit } \boldsymbol{t}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Zeigen Sie, dass die invertierbaren affinen Matrizen eine Untergruppe $\mathsf{AG}(n, \mathbb{R})$ der Gruppe $\mathsf{GL}(n+1, \mathbb{R})$ bilden, Ist diese ein Normalteiler? Zeigen Sie, dass die affinen Matrizen mit $A = E$, bzw. $A = rE$, $r \neq 0$ bzw. $A \in \mathsf{O}(n)$ bzw. $A = rB$, $B \in \mathsf{O}(n)$, $r \neq 0$ jeweils eine Untergruppe H_i $(i = 1, \ldots, 4)$ von $\mathsf{AG}(n, \mathbb{R})$ bilden. Welche sind Normalteiler? Finden Sie zu den Faktorgruppen H_i/H_j (sofern sie existieren) jeweils einen Isomorphismus auf eine bekannte Gruppe.

25: Normalteiler von Produkten. Zeigen Sie: Ist N_i Normalteiler von G_i. so ist $N_1 \times N_2$ Normalteiler von $G_1 \times G_2$. $D = \{(x, x) \mid x \in G\}$ ist genau dann Normalteiler von $G \times G$, wenn G kommutativ ist. Hat eine Gruppe G Normalteiler N_1, N_2, N_3 mit

$$N_i \cap N_j = \{e\},\ N_i \cdot N_j = G \ \text{ für } i \neq j$$

so ist G kommutativ und N_i isomorph zu N_j.

25 : D_4. Bestimmen Sie alle Zerlegungen von D_4 in ein semidirektes Produkt.

26: A_4. Bestimmen Sie alle Zerlegungen von A_4 in ein semidirektes Produkt.

27: Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie, dass die Untergruppe der oberen Dreickmatrizen in $\mathsf{GL}(2, K)$ isomorph zu einem äußeren semidirekten Produkt von $(K^\times)^2$ und $(K, +)$ ist.

28: Semidirekte Produkte ablescher Gruppen. Seien N und U abelsche Gruppen und $\alpha : U \to \mathsf{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $N \times_\alpha U$ genau dann abelsch ist, wenn $\alpha_u = \mathsf{id}_N$ für alle $u \in U$.

29: Semidirekte Produkte von Ordnung pq. Seien p und q Primzahlen. Bestimme $\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_p, +)$. Welche Homomorphismen von $(\mathbb{Z}_q, +)$ in $\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_p, +)$ gibt es? Bestimme die semidirekten Produkte von $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Z}_q$. Bestimme alle Gruppen von Ordnung pq mit $p \neq q$ prim.

30: Normalitätstest. Seien N und U Untergruppen von G, sei $N = \overline{A}$, $U = \overline{B}$ und $G = \overline{A \cup B}$. Zeigen Sie: N ist genau dann Normalteiler von G, wenn $unu^{-1} \in N$ und $u^{-1}nu \in N$ für alle $n \in A$ und $u \in B$.

31: Normalteiler im semidirekten Produkt. Sei $G = N \times_\alpha U$ und M Normalteiler von N. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

(1) M ist Normalteiler von G

(2) $\alpha_u(M) \subseteq M$ für alle $u \in U$.

(3) Die von $M \cup U$ erzeugte Untergruppe ist semidirektes Produkt von M und U.

32: Assoziativität der semidirekten Produktbildung. Sei $G \cong N \times_\alpha U$ semidirektes Produkt von N und U und $U \cong M \times_\beta V$ semidirektes Produkt von M und V. Zeigen Sie: NM ist semidirektes Produkt $N \times_\gamma M$ von N und M und G ist semidirektes Produkt $NM \times_\delta V$ von NM und V. Geben Sie den natürlichen Isomorphismus

$$\omega : N \times_\alpha (M \times_\beta V) \to (N \times_\gamma M) \times_\delta V$$

der äußeren semidirekten Produkte direkt an.

33: Diedergruppen. Bestimmen Sie die semidirekten Zerlegungen von D_n.

34: Isomorphe semidirekte Produkte. Gibt es Homomorphismen $\alpha \neq \beta$ von $\mathbb{Z}_3$ in $\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_2^2)$ mit $\mathbb{Z}_2^2 \times_\alpha \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_2^2 \times_\beta \mathbb{Z}_3$?

35: Kranzprodukt. Seien K und U Gruppen und bezeichne K^U die Menge aller Abbildungen von $f : U \to K$. Mit der punktweisen Multiplikation $(f \cdot g)(u) = f(u) \cdot g(u)$ wird K^U zur Gruppe. Für $u \in U$ und $f \in K^U$ definiere

$$\alpha_u(f) : U \to K \text{ durch } (\alpha_u(f))(x) = f(xu)$$

Zeige, dass $u \mapsto \alpha_u$ ein Homomorphismus $\alpha : U \to \mathsf{Aut}(K^U)$ ist. Das semidirekte Produkt $K^U \times_\alpha U$ heisst Kranzprodukt K wr U von K und U. Zeige, dass D_4 zum Kranzprodukt von $\mathbb{Z}_2$ wr $\mathbb{Z}_2$ isomorph ist.

41: Bewegung. Sei δ eine 90^o-Drehung und τ eine Verschiebung in der Ebene und G die G die von δ und τ erzeugte Untergruppe der Bewegungsgruppe. Zeigen Si, dass G semidirektes Produkt seines Normalteilers N von Translationen und der Drehugen um eine festen Punkt ist und $N \cong \mathbb{Z}^2$. Geben Sie eine möglichst kleine Menge R von Relationen an so, dass $G \cong \mathsf{FG}\langle d, t \mid R \rangle$.

46: Verabelung. Für eine Gruppe G wird die Kommutator-Untergruppe G' definiert als der kleinste Normalteiler, der alle Elemente $ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g, h \in G$ enthält. Zeigen Sie: (Hinweis: Homomorphieergänzungssatz)
a) G' ist der kleinste Normalteiler N so, dass G/N abelsch ist,

50: Erzeugen von Normalteilern und Kongruenzen. a) Sei G Gruppe und $R \subseteq G$, Zeigen Sie: Der kleinste Normalteiler $\supseteq R$, der von R erzeugte, ist gegeben als

$$\mathsf{Nt}(R) = \{\prod_{i=1}^{n} g_i^{-1} r_i^{\varepsilon_i} g_i \mid n \in \mathbb{N},\ r_i \in R,\ g_i \in G\}$$

53: Zehneck. Bestimmen Sie die 2- und 5-Sylow-Untergruppen von D_10. Wieviele Elemente der Ordnung 5 hat eine Gruppe von Ordnung 20?

54: Ordnung 33. Sei G eine Gruppe von Ordnung 33. Was kann man aufgrund der Sylowsätze úber die Anzahlen von 11- bzw. 3-Sylow-Untergruppen sagen? Welche Gruppen von Ordnung 33 gibt es (bis auf Isomorphie)?

55: Ordnung 21. Sei G eine Gruppe von Ordnung 21. Was kann man aufgrund der Sylowsätze über die Anzahlen von 7- bzw. 3-Sylow-Untergruppen sagen? Welche Gruppen von Ordnung 21 gibt es (bis auf Isomorphie) ?

56: Zentrum. Das Zentrum einer Gruppe G ist definiert als

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}$$

Zeigen Sie: a) $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G

b) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

c) $Z(G)$ besteht genau aus den a in G, die einelementige Bahn unter der Wirkung vog G auf G durch Konjugation haben.

d) Ist $|G| = p^2$ mit primem p, so $|Z(G)| > 1$ (Hinweis: Bahnformel). Folgern Sie, dass G abelsch ist.

57: Ordnung 18. Welche und wieviele 2- bzw. 3-Sylow-Untergruppen kann eine Gruppe der Ordnung 18 haben? Welche Gruppen von Ordnung 18 gibt es (bis auf Isomorphie)?

59: Ordnung 42. Welche Gruppen von Ordnung 42 gibt es (bis auf Isomorphie)? Warum gibt es eine Untergruppe von Ordnung 21?

61: Ordnung 36. Sei $|G| = 36$. a) Zeigen Sie $(\mathcal{A}_G(3), \mathcal{A}_G(2)) \subseteq \{(1,1), (1,3), (1,9), (4,1), (4,3)\}$

c) Bestimmen Sie die Konjuiertenklassen in $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$ von Matrizen A mit $A^4 = E$.

b) Klassifizieren Sie die G mit einer normalen Sylow-Untergruppe $N \ncong C_9$.

d) Klassifizieren Sie die G mit einer normalen Sylow-Untergruppe $N \cong C_9$.

62: Transitive Wirkung. Die Gruppe G wirke auf der Menge X transitiv, d.h. es gibt nur eine Bahn. Zudem sei die Wirkung fixpunktfrei. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler N besitzt mit

$$|G/N| \equiv 0 \,\mathsf{mod}\, |X|, \quad |X|! \equiv 0 \,\mathsf{mod}\, |G/N|$$

63: Zentralisator. Sei N Normalteiler von G und

$$C_G(N) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in N\}$$

der Zentralisator von N in G. Zeigen Sie, dass $C_G(N)$ ein Normalteiler von G ist und $G/C_G(N)$ zu einer Untergruppe von $\mathsf{Aut}(N)$ isomorph. Welchen Homomorphismusses Kern ist der Zentralisator?

Aufgabe 65: Normalisator. Der Normalisator einer Untergruppe H von G ist definiert als

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Zeigen Sie: a) $N_G(H)$ ist die größte Untergruppe U von G so, dass H ein Normalteiler von U ist.

b) $[G : N_G(H)]$ ist die Anzahl der in G zu H konjugierten Untergruppen (Bahnformel!)

Aufgabe 66: Konjugierte im semidirekten Produkt. Sei $G = N \times_\alpha U$ äußeres semidirektes Produkt. Definiere

$$\mathsf{Fix}\,\alpha = \{x \in N \mid \alpha_u(x) = x \text{ für alle } u \in U\}$$

Zeigen Sie

$$N_G(\{e\} \times U) = \{(x,u) \mid u \in U,\ x \in \mathsf{Fix}\,\alpha\}$$

Folgern Sie: Die Anzahl der zu U konjugierten Untergruppen in G ist

$$[G : U]/|\mathsf{Fix}\,\alpha|$$

Aufgabe 67: Ordnung 70. Bestimmen Sie die Gruppen von Ordnung 70 und jeweils die Anzahlen der p-Sylow-Untergruppen. Geben Sie jeweils eine Beschreiebung durch Erzeugende und Relationen an.

Aufgabe 68: Ordnung 100. Bestimmen Sie die Gruppen von Ordnung 100 und jeweils die Anzahlen der p-Sylow-Untergruppen.

Aufgabe 69: Ordnung 8. Bestimmen Sie die Gruppen von Ordnung 8 und ihre Automorphismengruppen.

Aufgabe 70: Ordnung 24. Bestimmen Sie die Gruppen von Ordnung 24 und jeweils die Anzahlen der p-Sylow-Untergruppen.

Klausur zur Einführung in die Algebra II

Aufgabe 1: Abel. a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe genau dann kommutativ ist, wenn die Abbildung $\phi(x) = x^{-1}$ ein Automorphismus ist,

b) Sei G eine Gruppe so, dass $x^2 = e$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie, dass G kommutativ ist.

Aufgabe 2: Vier. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 4 und geben Sie ihre Cayley-Graphen an.

Aufgabe 3: Acht. a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 8.

b) Beschreiben Sie diese jeweils durch Erzeugende und Relatione.

c) Geben Sie zu den nicht-abelschen Gruppen der Ordnung 8 jeweils die Charaktertafel und (bis auf Isomorphie) die irreduziblen Darstellungen an.

Aufgabe 4: Vierundvierzig. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen von Ordnung 44 (als (semi)direkte Produkte kleinerer Gruppen).

Abelsche Gruppen und Bewegungsgruppen

G1 Freie kommutative Gruppen. a) Von welcher der Mengen $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$ bzw. $E_3 = \{2, 3\}$ wird die Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ erzeugt?

b) Für welches der E_i aus a) wird die von E_i erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}$ als Gruppe bzw. als kommutative Gruppe von E_i frei erzeugt?

c) Sei $m \in \mathbb{N}$. Für welches $n \in \mathbb{N}$ wird $(\mathbb{Z}, +, 0, -)/n\mathbb{Z}$ von $\tilde{1}$ frei erzeugt als

- Gruppe
- kommutative Gruppe
- kommutative Gruppe mit (Torsion) $mx = 0$

d) Sei $E = \{1, \sqrt{2}\}$ und G die von E erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{R}, +, 0, -)$. Wird G als Gruppe von E frei erzeugt? Wird G als kommutative Gruppe von E frei erzeugt?

G0 =U10H1. Abelsche Präsentierung. Bestimmen Sie die abelsche Gruppe mit Erzeugern e_1, e_2, e_3 und Relationen

$$2e_1 + 2e_2 = 0,\ 4e_2 = 0,\ e_1 + 3e_3 = 0,\ 3e_1 + 2e_2 + 3e_3 = 0$$

Bestimmen Sie dazu zunächst eine Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{Z}^3$ und $d_i \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\mathsf{Spann}\{2e_1 + 2e_2,\ 4e_2,\ e_1 + 3e_3,\ 3e_1 + 2e_2 + 3e_3\} = \mathsf{Spann}\{d_1 b_1,\ d_2 b_2,\ d_3 b_3\}$$

Aufgabe 3. a) Sei G die kommutative Gruppe mit Erzeugern $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ und Relationen

$$(*)\ \ 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_3 = 0,\ \ 6\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 12\boldsymbol{e}_3 = 0$$

Geben Sie ein zu G isomorphes direktes Produkt zyklischer Gruppen an.

b) Sei U die von

$$\begin{pmatrix}\tilde{2}\\ \tilde{0}\\ \tilde{4}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\tilde{6}\\ \tilde{2}\\ \tilde{12}\end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe der Gruppe $H = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^3$. Geben Sie zu U und H/U jeweils ein isomorphes direktes Produkt zyklischer Gruppen an.

Aufgabe 12: Abelsche Gruppen

Wir scheiben $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$ für die zyklische Gruppe der Ordnung n.

a Gegeben sei die Gruppe $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$

(1) Finden Sie ein zu G isomorphes direktes Produkt möglichst kleiner zyklischer Gruppen (Weierstrass lässt grüssen)

(2) Finden Sie ein zu G isomorphes direktes Produkt zyklischer Gruppen $G_1, \ldots, G_k$ so, dass die Ordnung von G_i die von G_{i+1} teilt (Frobenius lässt grüssen)

(3) Bestimmen Sie die Minimalzahl von Erzeugern von G und geben Sie dann eine Präsentierung(smatrix) d.h. Relationen für G an.

b Die Untergruppe U der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^2$ werde erzeugt von den Spalten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 6 & 10 & 16\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ von $\mathbb{Z}^2$ und ganze Zahlen $d_1, \ldots, d_r$ so, dass $d_1\boldsymbol{f}_1, \ldots, d_r\boldsymbol{f}_r$ eine Basis von U ist. Skizzieren Sie U und die genannten Vektoren im Gitter $\mathbb{Z}^2$. Zu welchem Produkt zyklischer Gruppen ist die Faktorgruppe $\mathbb{Z}^2/U$ isomorph?

Aufgabe 10: Polyeder, Symmetriegruppen und Wirkung

Wir betrachten Polyeder mit Ecken A, B, C, D, E, F und $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dabei bilden Punkte A, B, C und D, E, F gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge a, die Punkte $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ein regelmäßiges Sechseck mit Kantenlänge b und die Kanten $A1$, $A2$, $B3$, $B4$, $C5$, $C6$, $E6$, $E1$, $F2$, $F3$, $D4$, $D5$ haben alle dieselbe Länge c. Das Sechseck und due beiden Dreiecke liegen in zueinander parallelen Ebenen.

a Was muss für a, b, c gelten, damit ein solcher Polyeder existiert? Zeigen Sie, dass der Polyeder dann bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt ist. (Hinweis: Betrachte die Orthogonalprojektion auf die von dem Sechseck aufgespannte Ebene.)

Seien nun a, b, c paarweise verschieden, G die Gruppe aller Symmetrien des Polyeders, G^+ die Gruppe der Drehsymmetrien.

b Bestimmen Sie die Bahnen auf der Eckenmenge und die Ordnung der Gruppe sowohl für G^+ wie auch für G.

c Geben Sie eine 2-elementige Erzeugendenmenge von G^+ an. Zeigen Sie, dass G^+ zu der (Dieder-/symmetrischen) Gruppe $D_3 \cong S_3$ isomorph ist. Geben Sie eine 3-elementige Menge X geometrischer Objekte so an, dass die gegebene Wirkung von G^+ auf X eine treue Wirkung induziert.

d Zerlegen Sie, sofern möglich, G in ein direktes Produkt echter Untergruppen.

Aufgabe 11: Permutationen, Struktur von Gruppen, Sylow-Sätze
Beachte, dass die Anzahl der p-Sylow-Untergruppen von G die Ordnung von G teilt.

a Bestimmen Sie alle 4-elementigen Untergruppen der alternierenden Gruppe A_5 (der geraden Permutationen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Wieviele sind es? Welche sind zueinander konjugiert? Welche sind isomorph zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen?

b Sei G ein Gruppe der Ordnung 15. Bestimmen Sie zu allen in Frage kommenden Primzahlen p die Ordnung und die Anzahl n_p der p-Sylow-Untergruppen von G. Muss G zyklisch sein? Wieviele nichtisomorphe G gibt es?

c Kann A_5 eine Untergruppe der Ordnung 15 haben? Wie gross muss n sein, wenn A_n eine Untergruppe der Ordnung 15 enthalten soll.

d Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung 30 einen Normalteiler der Ordnung 3 oder 5 und eine Untergruppe der Ordnung 15 besitzt. Zeigen Sie, dass G von zwei geeigneten Elementen erzeugt wird und geben Sie jeweils Relationen an, durch die die Struktur der Gruppe G festgelegt wird. Wieviele nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 30 gibt es (höchstens)? Wie könnte man zeigen, dass es die auch wirklich gibt.