Anmerkungen zu Loesungsvorschlaegen

2 2. Übung

H 7 3) Mit Repräsentanten zu rechnen ist völlig legitim. Kongruenzklassen sind eher Ideologie.

4 4. Übung

G 13. Zu 2) 3) Begründung: Konjugation ist ein Automorphismus der ganzen Struktur - die Geometrie eingeschlossen.

H 14.

- Auf einer 4-elementigem Menge V hat die Menge P der geordneten Paare $4 \cdot 3$ Elemente. Einen schlichten gerichteten Graphen kann man als Abbildung von P in $\{0, 1\}$ auffassen.
- Die Bahnen der Wirkung von S_4 auf P entsprechen den Isomorphietypen.
- Mit "Bahnen der Symmetriegruppe" sind die Konjugiertenklassen gemeint.
- Um das Burnside-Lemma anzuwenden, hat man für $\sigma \in S_4$ die Kardinalität der Fixmenge $Fix(\sigma)$ zu bestimmen. $Fix(\sigma)$ besteht gerade aus den Graphen, für die σ ein Automorphismus ist. Die Anzahl ist 2^k, wobei k die Anzahl der Bahnen der Wirkung auf P der von σ erzeugten Untergruppe ist. Man kann nämlich für jede dieser Bahnen unabhängig 'Kante' oder 'keine Kante' setzten.
- Man braucht pro Konjugiertenklasse nur ein σ zu betrachten
- Es ergibt sich: 218 Isomorphietypen
- Will man nur solche Graphen erlauben, bei denen es keine 2 gegenläufigen Kanten zwischen 2 Punkten gibt, so lässt man aus den wie oben bestimmten $Fix(\sigma)$ die nicht zuässigen Graphen weg; man bekommt 2^{k-l} wobei l die Anzahl der Bahnen ist, die zugleich ein (i, j) und (j, i) enthalten - die dürfen ja keine Kante bekommen, da gibt es also keine Wahl.

5 5. Übung

H 17: Hier handelt es sich um einen Hinweis, nicht um eine stringente Loesung. Das Vorgehen wurde in der Vorlesung ausfuehrlich diskutiert

G 17

1. Die Isomorphietypen abelscher Gruppen der Ordnung p^k entsprechen den Partitionen $k = k_1 + ... + k_r$ mit $k_i \geq k_{i+1}$

2. Dass ein direktes Produkt von Untergruppen Untergruppe des direkten Produkts ist, ist klar. Das Zitat des Chinesischen Reststatz ist etwas verfremdet und nur als Hinweis zu verstehen, dass es noch weitere Isomorphietypen von Untergruppen gibt. Die (nicht ganz adaequate) Argumentation mit Sylow zu den Ismorphietypen von Untergruppen von Ordnung 3^k ist korrekt.

4. hier ist mehr zu sagen als bei 2)

H 16 auch ein Hinweis

6 6. Übung

H 18. Einfacher geht es so: Wegen $|S_5| = 3 \cdot 5 \cdot 8$ suchen wir Untergruppen der Ordnung $3, 5, 8$

- $\{\mathsf{id}, (123), (123)^2\}$ isomorph C_3
- $\{(12345)^k \mid 0 \leq k \leq 4\}$ isomorph C_5
- $\{(1234)^l(12)^l \mid k = 0, 1, 2, 3,\ l = 0, 1\}$ isomorph D_4

Nach Sylow sind die Untergruppen von Ordung $3, 5, 8$ jeweils zu der angebebenen konjugiert - aber Konjugation ist ein Isomorphismus der Gruppenwirkung von S_5 auf $X = \{1, \ldots, 5]$. Somit

- Ordung 3: A_Y, $Y \subseteq X$, $|Y| = 3$ also $\binom{5}{3} = 10$ Gruppen
- Ordnung 5: Erzeugt von 5-Zyklus, je 4 diesselbe Gruppe, also $(4 \cdot 3 \cdot 2)/4 = 6$
- Ordnung 8: Untergruppe von S_Y, $|Y| = 4$. Da S_Y ismorph zur Drehgruppe des Würfels, gibt es je 3, also insgesamt 15

7 7. Übung

2. d) Fuer $a \in \mathsf{Soc}(A)$ und $(z \mod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ definiiert man

$$(z \mod p)a = za$$

und ueberlegt sich, dass das wegen $pa = 0$ wohldefiniert ist. Man sieht leicht, dass alle Anforderungen an eine Multiplikation mit Skalaren erfuellt sind.

e) Die gemeinsame Verallgemeinerung ist die Theorie der endlich erzeugten Moduln ueber euklidischen Ringen.: eine abelsche Gruppe ist ein $\mathbb{Z}$-Modul, ein Vektorraum V mit Endomorhismus ϕ ein $K[X]$-Modul

$$p(X)v = p(\phi)(v)$$

Aber man kann die abelsche Gruppe nicht als Vektorraum auffassen.

Die Primaerzerlegung von endlichen abelschen Gruppen entspricht der Zerlegung in verallgeminerte Eigenraeume.

Der Fall einer abelschen Gruppe A von Primpotenzordnung p^n ist analog zu dem Fall eines Endomorphismus ϕ eines Vektorraums V mit charakteristischem Polynom $(X-\lambda)^n$ O.B.d.A. $\lambda = 0$, d.h. ϕ nilpotent

Die maximalen zyklischen Untergruppen B entsprechen den maximalen zyklischen ϕ-invarianten Teilraeumen U - ein ϕ-invarianter Teilraum U ist zyklisch, wenn es einen Vektor v gibt so, dass U der Spann der $\phi^m(v)$ ist, $m = 0, 1, 2. \ldots$

Die absteigende Kette

$$B \supset pB \supset p^2B \supset \ldots \supset p^kB = 0$$

von Untergruppen ist dann analog der Kette

$$U \supset \phi(V) \supset \phi^2(U) \supset \ldots \supset \phi^k(U) = 0$$

von ϕ-invarianten Untervektorraeumen. und somit zur Jordankette

$$v, \phi(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{k-1}(v)$$

Waehlt man diese als Teil der Basis von V so hat man als Matriix die zugehoerige Begleitmatrix - in der ueblichen Jordan-Normalform nimmt an die Jordanketten in der umgekehrten Anordnung

3. a) P, D, Q und P^{-1} richtig berechnet. Die neue Basis von $\mathbb{Z}^3$ steht in den Spalten von P^{-1} und diese ist dann auch fuer die weitere Untersuchung in b) wesentlich.

Aus LA weiss man, das in der Transformationsmatrix S die Koordinaten der neuen Basis β bzgl. der alten Basis α stehen. Dann kann man aus den neuen Koordniaten x^β eines Vektors die alten zurueckgewinnen durch

$$x^\alpha = Sx^\beta$$

umgekehrt:

$$x^\beta = S^{-1}x^\alpha$$

Man kann also mit den durch S^{-1} gegebenen Zeilenumformungen erreichen, dass die β-Koordinaten eine einfachere Gestalt haben - in der Aufgabe ist das dann in der Matrix P ausgedrueckt, Also ist $P^-1 = S$ die Transformationsmatix und ihre Spalten geben die neue Basis an.

b) Die notwendigen Erlaeuterungen wurden in der Vorlesung gegeben.

4. Zu $\Leftarrow$ $B + C$ ist eine Unterguppe, die B und C umfasst - wie man leicht nachrechnet

5. Fuer jede Abbildung ϕ gilt

- $\phi(U_1) \subseteq \phi(U_2)$ falls $U_1 \subseteq U_2$.
- $\phi^{-1}(V_1) \subseteq \phi^{-1}(V_2)$ falls $V_1 \subseteq V_2$
- $\phi(\phi^{-1}(V)) = V$

Da ϕ Homomorphimus ist, gilt offensichtich

- $\phi(U_1 + U_2) = \phi(U_1) + \phi(U_2)$
- $\phi(U)$ Untergruppe, falls U Untergurppe.

- $\phi^{-1}(V)$ Untergruppe, falls V Untergruppe
- $\mathsf{Kern}\phi \subseteq \phi^{-1}(V)$, weil $\phi x = 0 \in V$ fuer $x \in \mathsf{Kern}\phi$.

Sei nun $\mathsf{Kern}\phi \subseteq U$ und $x \in \phi^{-1}(\phi(U)$, also $\phi x = \phi u$ fuer ein $u \in U$. Dann $x - u \in \mathsf{Kern}\phi$, also $x = x - u + u \in U$. Somit $\phi^{-1}(\phi(U)) = U$. Damit sind α und β zueinander invers.

Insbesondere wie am Anfang bemerkt

$$U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow V_1 = \alpha(U_1) \subseteq V_2 = \alpha(U_2) \Rightarrow U_1 = \beta(V_1) \subseteq U_2 = \beta(V_2)$$