Hinweise zu H6.2

a) Gefragt ist nach dem Differential $\mathrm{d}\beta(p,q)$ an der Stelle (p,q) für die Funktion $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Also

$$\beta(p+\Delta\vec{x}, q+\Delta\vec{y}) = \beta(p,q) + (\mathrm{d}\beta(p,q))(\Delta\vec{x},\Delta\vec{y}) + R((\Delta\vec{x},\Delta\vec{y}))$$

mit

$$\frac{R((\Delta\vec{x},\Delta\vec{y}))}{|((\Delta\vec{x},\Delta\vec{y})|} \to \text{ für } ((\Delta\vec{x},\Delta\vec{y}) \to (\vec{0},\vec{0})$$

Das geht wie bei Produkt bzw. Vektorprodukt durch "Ausmultiplizieren" und scharfes Ansehen der dabei einstehenden Summanden.

Bemerkung: Statt "Differential" ist auch die irreführende Bezeichnung "Ableitung" im Gebrauch. Diese ist dann legitim, wenn man statt der linearen Abbildung $\mathrm{d}f(p)$ ihre Matrix bzgl. einer Basis meint.

b) Es geht darum, zu zeigen, dass die Abbildung

$$(p,q) \mapsto \mathrm{d}\beta(p,q), \quad \mathbb{R}^{2n} \to L(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n}$$

linear ist. Hier steht $L(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ für den Raum der Linearformen auf $\mathbb{R}^{2n}$, den man mit $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren kann

$$\mathrm{d}\beta(p,q) \hat{=} (a_1,\ldots,a_{2n}) \hat{=} \mathsf{grad}\beta(p,q)$$

Die Vektorraumstruktur von $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad (rf)(\vec{x}) = r\,f(\vec{x})$$

Also ist zu zeigen

$$\mathrm{d}\beta(p+r\hat{p}, q+r\hat{q}) = \mathrm{d}\beta(p,q) + r\mathrm{d}\beta(\hat{p}, q+\hat{q})$$

also zu $p,q,\hat{p},\hat{q} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ zu zeigen, dass

$$(\mathrm{d}\beta(p+r\hat{p}, q+r\hat{q}))(v,w) = (\mathrm{d}\beta(p,q))(v,w) + r(\mathrm{d}\beta(\hat{p},q+\hat{q}))(v,w) \text{ für alle } v,w$$

c) Es ist zu zeigen, dass die Abbildung

$$(p,q) \mapsto \mathrm{d}\beta(p,q) \quad \mathbb{R}^{2n} \to L(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n}$$

stetig ist. Vgl. dazu Teil b.