23 Integration auf Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}^n$

23.1.1

$\mathbb{R}^2$

$b = (b_1, b_2)$

$= [a,b] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2\}$

$a = (a_1, a_2)$

$]a,b[= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2\}$

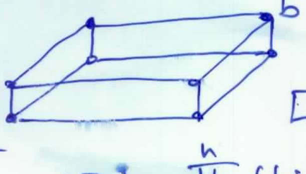
Maß

$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

Weite $\max\{b_1 - a_1, b_2 - a_2\}$

$= |[a,b]|$

$\mathbb{R}^3$



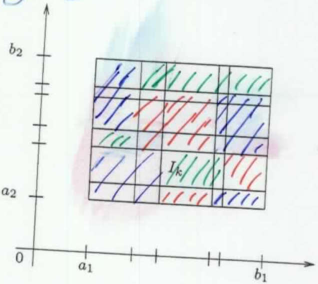
$[a,b]$

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

23 1.2. Zerlegungen

Weite $|Z| = \max |I|$

I Teilintervall



Gitter-Zerlegung

Zerlegung Z verfeinert zu Gitterzerlegung

Z, Z' haben gemeinsame Verfeinerung

23.1.3 Treppenfunktionen

$$\int_I f\,dx = \sum_{[u,v]\in Z} f(\xi_{uv})\,\mu([u,v])$$

$\xi_{uv} \in]u,v[$ unabhängig

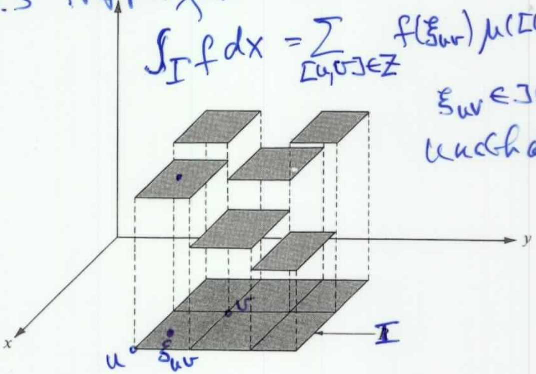


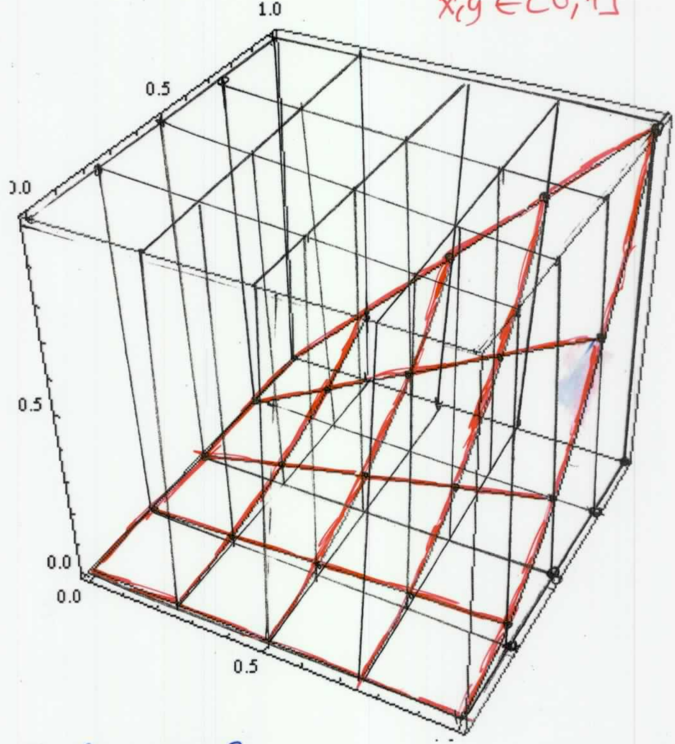
FIGURE 2.8 *The graph of a step function defined over a rectangle* I

$\xi = (\xi_{u,v} \mid [u,v] \in Z)$ Zwischenvektor

2.3.1.5 Riemann Integral

$f(x,y) = x y^2$

$x, y \in [0,1]$



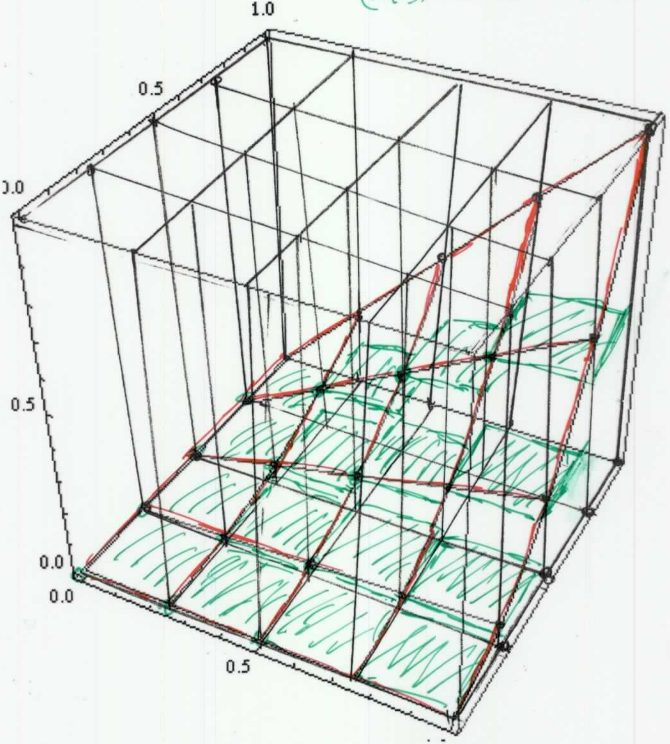
Zerlegung Z

$\left[\frac{1}{4}(k,l), \frac{1}{4}(k+1, l+1)\right] \quad k,l = 0,1,2,3$

$f(x,y) = xy^2 \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ 11

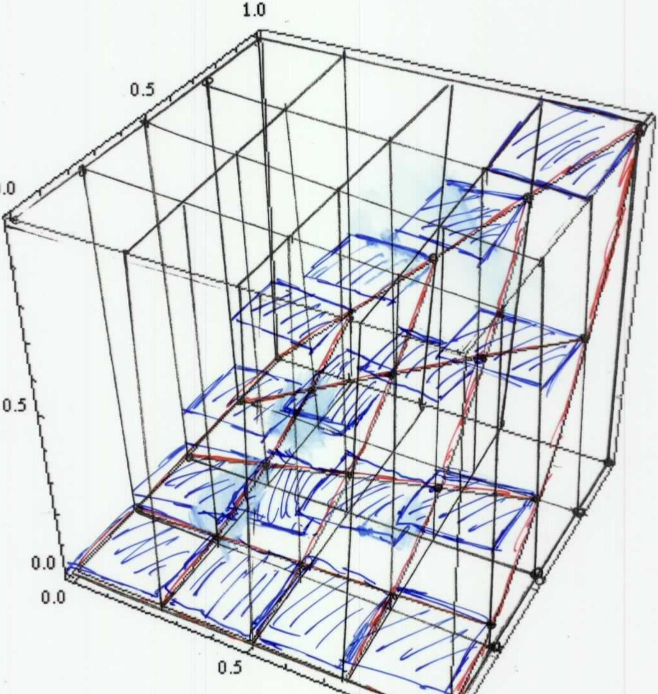
$n = \frac{1}{4} \quad f_n(x,y) = \frac{1}{n}k \cdot \left(\frac{1}{n}l\right)^2$

$(x,y) \in [\frac{1}{n}(k,l), \frac{1}{n}(k+1, l+1)]$



$$\int_I f_n \, d(x,y) = \sum_{\substack{k,l \\ =0,\dots,n-1}} \frac{1}{n}k\left(\frac{1}{n}l\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Untersumme



$$\int_I \bar{f}_n \, d(x,y) = \sum_{\substack{k,l \\ =1,\dots,n}} \frac{1}{n}k \cdot \left(\frac{1}{n}l\right)^2 \frac{1}{n^2}$$

Obersumme

(13)

$$\int_I \overline{f}_n \, d(x,y) - \int_I \underline{f}_n \, d(x,y)$$

$$= \frac{1}{n^5} \left(n^3 + \sum_{k=1}^{n-1} kn^2 + \sum_{l=1}^{n-1} nl^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n^4} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$\to 0$ für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \underline{f}_n \, d(x,y) \le \int_I f \, d(x,y) \le \lim_{n\to\infty} \int_I \overline{f}_n \, d(x,y)$$

existiert

$$\int_I \bar{f}_n \, d(x,y)$$

$$= \frac{1}{n^5}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} l^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^5} \; \frac{n(n+1)}{2} \; \frac{n(n+1)(2n)}{6} \longrightarrow \frac{1}{6}$$

$$\int_I \underline{f}_n \, d(x,y)$$

$$= \frac{1}{n^5}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)\left(\sum_{l=0}^{n-1} l^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^5} \; \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \longrightarrow \frac{1}{6}$$

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

f integrierbar $\Leftrightarrow$
Es gibt Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

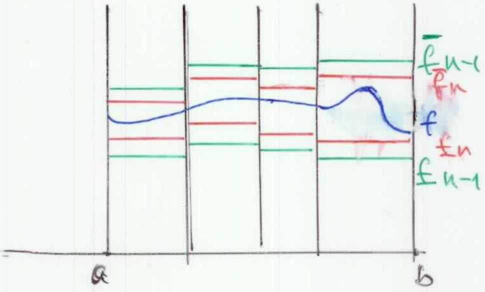
$$\underline{f}_{n-1} \leq \underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n \leq \overline{f}_{n-1} \quad \forall n$$

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x \quad \to 0$$

Das *Riemann-Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ von f ist die durch die Intervallschachtelung

$$[\int_a^b \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b \overline{f}_n(x)\mathrm{d}x]\ (n \in \mathbb{N})$$

bestimmte reelle Zahl
- und unabhängig von den Treppenfunktionen

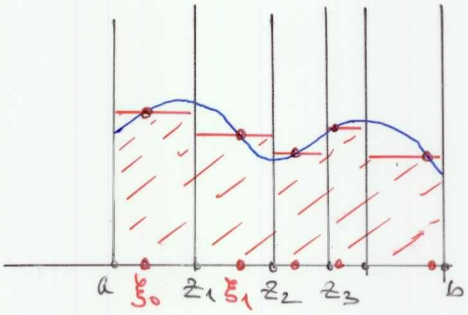


Riemannsumme von f für
Zerlegung $Z : a = z_0 < z_1 \ldots < z_n = b$ und
Zwischenvektor $\vec{\xi}$: $\xi_k \in]z_k, z_{k+1}[$

$$R(Z, \vec{\xi}, f) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(\Delta x)_k$$

f integrierbar $\Leftrightarrow$
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für
alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit Maschenweite $\leq \delta$
und alle Zwischenvektoren $\vec{\xi}$ gilt:

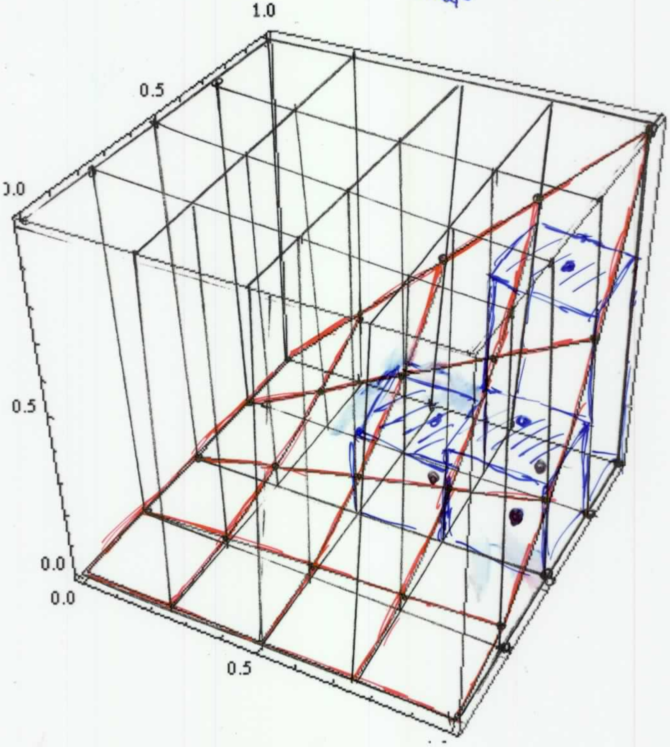
$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - R(Z, \vec{\xi}, f) \right| \leq \varepsilon$$



Riemann-Summe

$$R(Z, \xi, f) = \sum_{[u,v] \in Z} f(\xi_{u,v})\, \mu([u,v])$$

$\xi_{u,v} \in [u,v]$



Satz 23.2 $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt
Äq $\qquad c \in \mathbb{R}$

(i) $\exists$ Treppenfkt $\underline{f}_k, \overline{f}_k : I \to \mathbb{R}$

$$\underline{f}_k \leq f \leq \overline{f}_k \quad \text{alle } k$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \underline{f}_k \, dx = c = \int_I \overline{f}_k \, dx$$

oBdA $\underline{f}_{k-1} \leq \underline{f}_k \quad \overline{f}_k \geq \overline{f}_{k-1}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \forall Z$ Weite $Z \leq \delta \Rightarrow$

$$\forall \xi \quad |c - R(Z, \xi, f)| \leq \varepsilon$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ Gitter $Z \quad \forall \xi$

$$|c - R(Z, \xi, f)| \leq \varepsilon$$

$$c = \int_I f \, dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n) \, d(x_1, \dots x_n)$$

f Riemann integrierbar

Korollar $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt

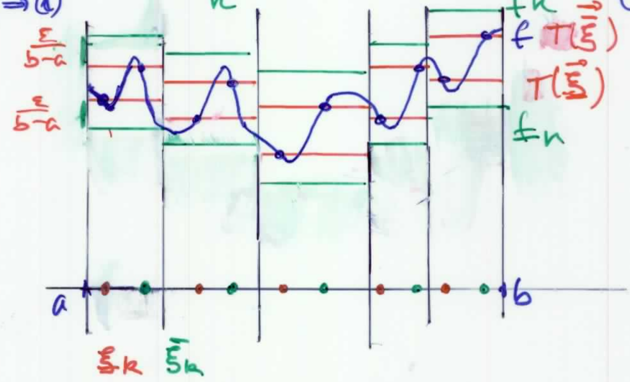
f Riemann integrierbar $\Longleftrightarrow$

$\exists$ Treppenfkt $\underline{f}_k \leq f \leq \overline{f}_k$

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \overline{f}_k - \int_I \underline{f}_k = 0$$

$(III) \Rightarrow (I)$ ③

$\varepsilon = \frac{1}{n}$



$$\int T(\vec{\underline{\xi}}) - \int \underline{f}_n \leq \varepsilon$$

$$|c - R(\vec{\underline{\xi}})| \leq \varepsilon$$

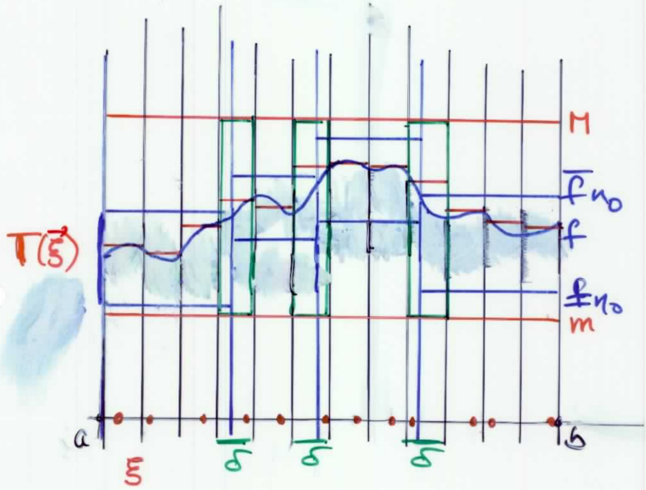
$$\left|\int \underline{f}_n - c\right| \leq 2\varepsilon$$

$$\int \underline{f}_n \to c$$

$$T(\vec{\xi})(x) = \begin{cases} f(\xi_k) & z_k < x < z_{k+1} \\ f(z_k) & x = z_k \end{cases}$$

$$\underline{R(\vec{\xi}) = \int T(\vec{\xi})}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii)



geg n_0: $\square + \square + \square + \square \le \varepsilon/3$

$\leadsto \delta$ mit $\square + \square + \square \le \varepsilon/3$

$$\int \underline{f}_{n_0} - \frac{\varepsilon}{3} \le \int T(\vec{\xi}) \le \int \overline{f}_{n_0} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\le \quad c \quad \le$$

$$\Rightarrow |c - R(\vec{\xi})| \le \varepsilon$$

Untersumme

$$U(Z,f) = \sum_{I \in Z} \inf f(\mathring{I}) \cdot \mu(I)$$

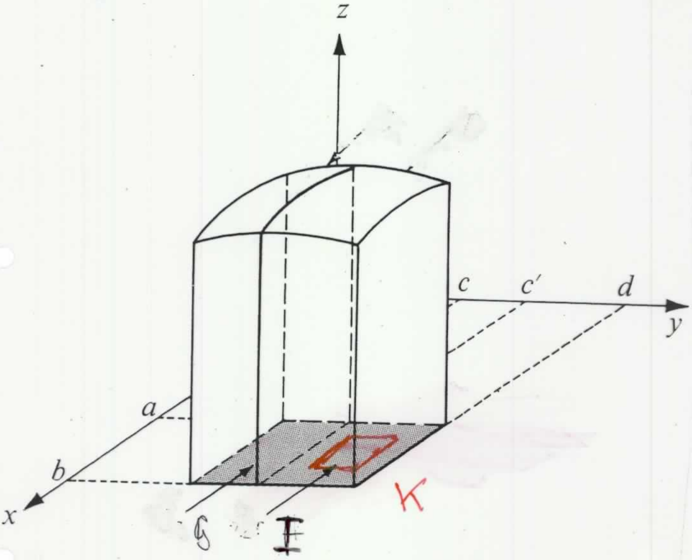
Obersumme

$$O(Z,f) = \sum_{I \in Z} \sup f(\mathring{I}) \cdot \mu(I)$$

(iv) $$c = \sup_Z U(Z,f)$$

$$= \inf_Z O(Z,f)$$

2.3.1.7 Additivität



$H = G \cup I = G \oplus I$

$\int_H f = \int_G f + \int_I f$ additiv

falls diese existieren

$\int_I f$ ex $\Rightarrow \int_K f$ existiert $K \subseteq I$

Satz 1~~5.10~~ *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und es gilt*

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle $a \le c \le d \le b$ mit $d - c \le \delta$ und alle $\xi \in [c,d]$ gilt

$$\left| \int_c^d f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)(d-c) \right| \le \varepsilon(d-c)$$

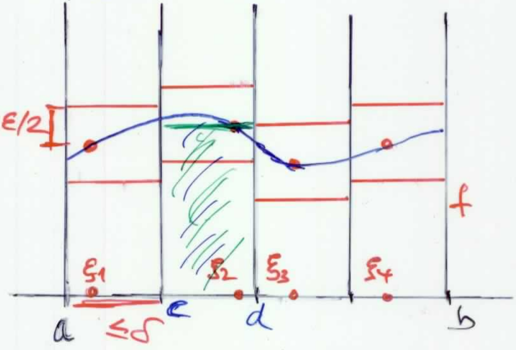
(ii) Mittelwertsatz*: Es gibt $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.*

$(b-a)\min f \le \int f \le (b-a)\max f$

u Zwischwertsatz

Bew. $\varepsilon = \frac{1}{n}$

δ zu $\varepsilon/2$ (glm. stetig)



$\int \bar{f}_n - \int \underline{f}_n \le$  $\longrightarrow 0$

Theorem 23.9 Summationstheorem. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

(i) *$f : I \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle Intervalle $[c, d] \subseteq I$ von Weite $\leq \delta$ und alle $\xi \in [c, d]$ gilt*

$$\left| \int_{[c,d]} f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)\mu([c, d]) \right| \leq \varepsilon\mu([c, d])$$

(ii) Mittelwertsatz*:*
Es gibt $\xi \in I$ mit $\int_I f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\mu(I)$

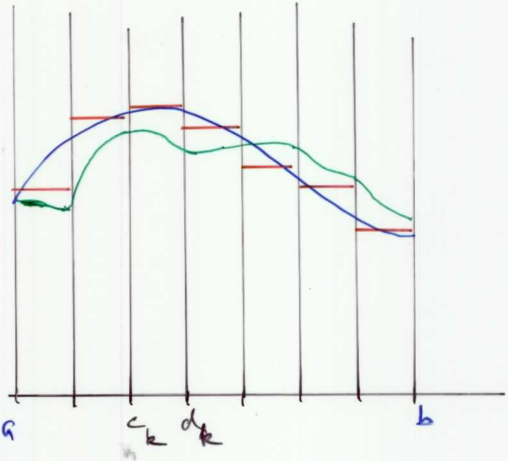
(iii) *Sei $W[(c, d)]$ für alle $[c, d] \subseteq I$ definiert und additiv. Gelte weiterhin*

(∗) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle (regelmäßigen) $[c, d] \subseteq I$ von Weite $\leq \delta$ gilt*

Es gibt $\xi \in [c, d]$ mit
$$|W([c, d]) - f(\xi)\mu([c, d])| \leq \varepsilon\mu([c, d])$$

Dann gilt für alle $[a, b] \subseteq I$:

$$W([a, b]) = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$$



$$\left| \square - \square \right| \leq \varepsilon \cdot \mu[c,d]$$

$$\left| \square - \square \right| \leq \varepsilon \cdot \mu[c,d]$$

$$\left| W(a,b) - \int_{[a,b]} f \right|$$

$$\leq \sum \left| W(c_k,d_k) - \int_{[c_k,d_k]} f \right| \leq 2\varepsilon \mu([a,b])$$

23.2.3 Satz von Fubini

$I_x \subseteq \mathbb{R}^k$, $I_y \subseteq \mathbb{R}^l$ kompakte Intervalle

$f: I_x \times I_y \to \mathbb{R}$ integrierbar

$z = f(\vec{x}, \vec{y})$ $\quad \vec{x} \in I_x$, $\vec{y} \in I_y$

$\Rightarrow$

$g: I_y \to \mathbb{R}$ existiert

$g(\vec{y}) = \int_{I_x} f(\vec{x}, \vec{y})\, d\vec{x}$

$\to$ g integrierbar

$$\int_{I_y} g(\vec{y})\, d\vec{y} = \int_{I_x \times I_y} f(\vec{x}, \vec{y})\, d(\vec{x}, \vec{y})$$

$h: I_x \to \mathbb{R}$ existiert

$h(\vec{x}) = \int_{I_y} f(\vec{x}, \vec{y})\, d\vec{y}$

$\Rightarrow$ h integrierbar

$$\int_{I_x} h(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{I_x \times I_y} f(\vec{x}, \vec{y})\, d(\vec{x}, \vec{y})$$

Spezialfall $f: I_x \times I_y \to \mathbb{R}$ stetig

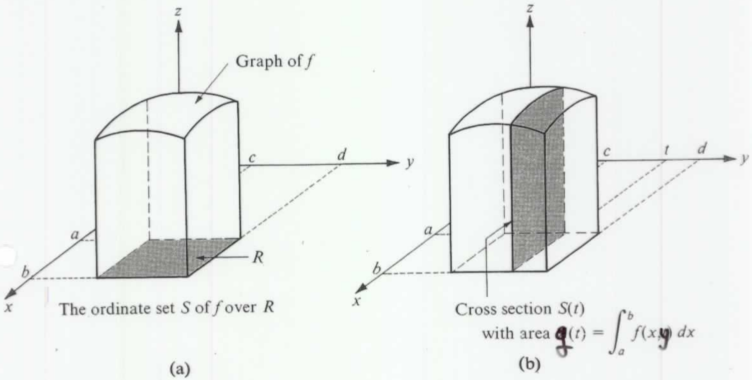
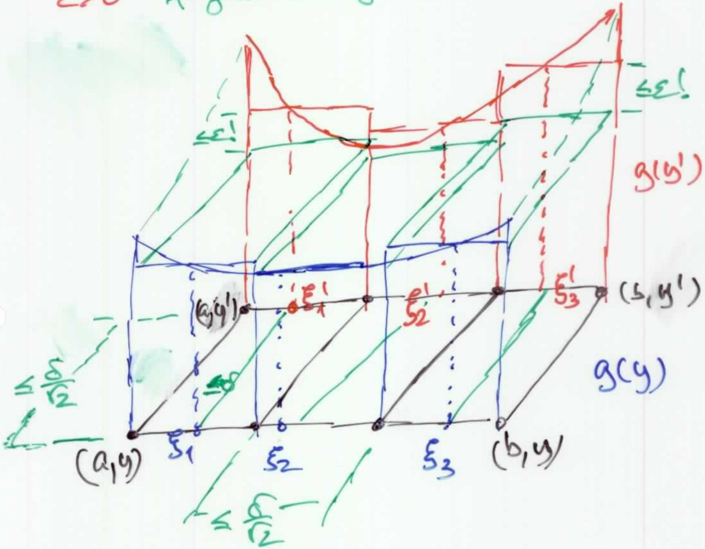


FIGURE 2.4 *The volume of S is the integral of the cross-sectional area:* $V(S) = \int_c^d g(t)\,dt$.

$\varepsilon > 0$ f glm stetig $\rightsquigarrow$ $\delta > 0$

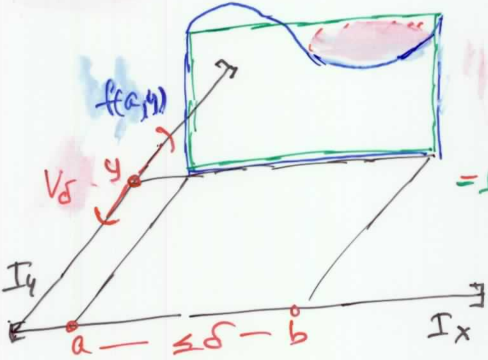


$\Rightarrow |g(y') - g(y)| \leq \varepsilon(b-a)$

$\Rightarrow$ $g(y)$ stetig

$\varepsilon > 0$

$$V_\delta = \{ y \in I_y \mid b-a < \delta \Rightarrow \int_a^b f(x,y)\,dx = f(a,y)(b-a) \pm \varepsilon(b-a) \}$$



$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$= f(a,y)(b-a)$$

$$\pm \varepsilon(b-a)$$

$$I_y = V_{\delta_1} \cup \dots \cup V_{\delta_r}$$

$$\delta' = \min \delta_j$$

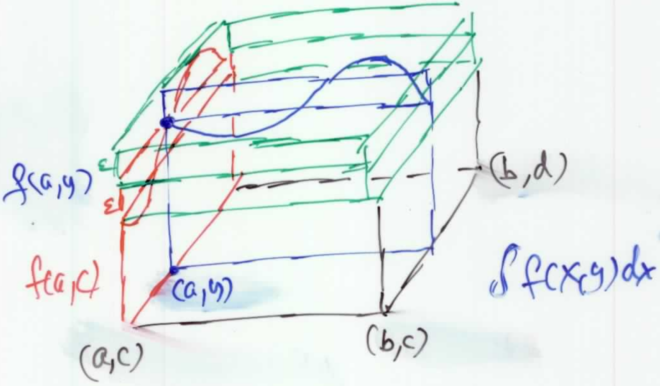
Sandwichtheorem!!

+ I_y kompakt

Sandwichtheorem: δ''

$$d-c < \delta'' \Rightarrow \int_c^d f(a,y)\,dy = f(a,c)(d-c) \pm \varepsilon(d-c)$$

$$\delta := \min\{\delta', \delta''\}$$



$$W([a,b]\times[c,d]) := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

additiv

$$= \left(f(a,c) \pm 2\varepsilon\right)(b-a)(d-c)$$

$$= \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d(x,y)$$

$W([a,b]\times[c,d]) :=$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$= \int_c^d \left(f(a,y) \pm \varepsilon \right)(b-a)\, dy$$

$$= \left(\int_c^d f(a,y)\, dy \right)(b-a) \pm \varepsilon (b-a)(d-c)$$

$$= \left(f(a,c)(d-c) \pm \varepsilon (d-c) \right)(b-a) \pm \varepsilon (b-a)(d-c)$$

$$= \left(f(a,c) \pm 2\varepsilon \right)(b-a)(d-c)$$

W additiv

Summationstheorem $\Rightarrow$

$$W([a,b]\times[c,d]) = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d(x,y)$$

$\square$

*3. Ein Leiter der Länge l_0 verzweigt sich in einem seiner Enden in k einzelne Leiter mit den Längen l_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$, wobei die Stromstärke in den Teilleitern $i_0, i_1, \ldots$, bzw. i_k ist. Gefragt wird, wie die Querschnittsflächen $q_0, q_1, \ldots, q_k$ der einzelnen Teilleiter zu wählen **sind**, damit bei gegebener Potentialdifferenz E für die Ketten $(l_0, l_1), (l_0, l_2), \ldots, (l_0, l_k)$ die geringste Materialmenge V gebraucht wird* (Abb. 167).

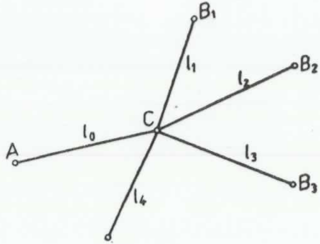


Abb. 167

Wir bezeichnen den Widerstand eines Leitungsdrahtes aus dem gegebenen Material, dessen Länge und Querschnittsfläche gleich der Einheit sind, mit c.

Die Funktion V der Veränderlichen $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k$, deren kleinster Wert gesucht wird, lautet

$$V = l_0 q_0 + l_1 q_1 + \cdots + l_k q_k.$$

Unter Beachtung der gegebenen Potentialdifferenz E können wir die k Beziehungen

$$\varphi_s = c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_s i_s}{q_s}\right) - E = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k) \tag{39}$$

hinschreiben.

Wir bilden die Funktion

$$\Phi = (l_0 q_0 + l_1 q_1 + \cdots + l_k q_k) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \left[c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_s i_s}{q_s}\right) - E\right].$$

Indem wir die partiellen Ableitungen von Φ nach $q_0, q_1, \ldots, q_k$ gleich Null setzen, erhalten wir

$$(40)\qquad \begin{cases} l_0 - \dfrac{c\, l_0 i_0}{q_0^2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k) = 0, \\ l_s - \dfrac{\lambda_s c\, l_s i_s}{q_s^2} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Aus den Bedingungen (39) finden wir

$$\frac{l_1 i_1}{q_1} = \frac{l_2 i_2}{q_2} = \cdots = \frac{l_k i_k}{q_k} = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0},$$

und wir können, indem wir den gemeinsamen Wert sämtlicher Glieder dieser Beziehung mit σ bezeichnen,

$$(41)\qquad q_s = \frac{l_s i_s}{\sigma} \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \qquad \sigma = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}$$

schreiben.

Aus den Gleichungen (40) folgt

$$\lambda_s = \frac{q_s^2}{c\, i_s} = \frac{l_s^2 i_s}{c\, \sigma^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke für λ_s in die erste der Gleichungen (40) erhalten wir

$$q_0^2 = \frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_k^2 i_k)$$

oder

$$q_0 = \frac{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_k^2 i_k)}}{\dfrac{E}{c} - \dfrac{l_0 i_0}{q_0}},$$

woraus schließlich

$$q_0 = \frac{c}{E}\left[i_0 l_0 + \sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_k^2 i_k)}\right]$$

folgt.

Setzen wir diesen Wert von q_0 in die Beziehungen (41) ein, so erhalten wir für $q_1, q_2, \ldots, q_k$:

$$q_s = \frac{c\, l_s i_s}{E}\left(1 + \frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \cdots + l_k^2 i_k)}}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Die notwendigen Bedingungen für das Maximum und Minimum von V liefern uns also ein einziges System positiver Werte für $q_0, q_1, \ldots, q_k$; aber auf Grund physikalischer Überlegungen ist klar, daß sich für eine gewisse Wahl der Querschnittsflächen eine geringste Materialmenge ergeben muß, und man kann daher behaupten, daß die erhaltenen Werte $q_0, q_1, \ldots, q_k$ gerade die Lösung der Aufgabe ergeben.