Analysis 1
15. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
15. Februar 2011

Aufgabe 1

Sei (M,d) ein beliebiger metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Jede Funktion $f:\mathbb{Z}\to M$ ist stetig.

b) Für jeden Punkt $a\in M$ ist die Funktion $f:M\to\mathbb{R},\ x\mapsto d(x,a)$ stetig.

c) Sei $n\geq 1$ eine natürliche Zahl. Die Koordinatenabbildung $\pi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $\pi_i(x_1,\dots,x_n):=x_i$ ist für jedes $i=1,\dots,n$ stetig.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Funktion $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x):=x^5+2x^4+16x-32+\sqrt{|x|}\,.$$

a) Ist f stetig?

b) Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle hat.
Zeigen Sie , dass die Gleichung $f(x)=-1$ mindestens eine Lösung $x\in[-2,2]$ besitzt.

Aufgabe 3 Urbilder abgeschlossener Mengen

Seien (M,d_M) und (N,d_N) metrische Räume. Zeigen Sie:

a) Für eine Funktion $f:M\to N$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion f ist stetig.
2. Das Urbild $f^{-1}(A)\subseteq M$ jeder abgeschlossenen Menge $A\subseteq N$ ist abgeschlossen.

b) Ist $f:M\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist die Menge der Nullstellen von f abgeschlossen in M.

Aufgabe 4 Bilder offener/abgeschlossener Mengen

Seien (M,d_M) und (N,d_N) metrische Räume und $f:M\to N$ eine Funktion. Betrachten Sie folgenden Aussagen:

a) Die Funktion f ist stetig.

b) Das Bild $f(U)\subseteq N$ jeder offenen Menge $U\subseteq M$ ist offen.

c) Das Bild $f(A)\subseteq N$ jeder abgeschlossenen Menge $A\subseteq M$ ist abgeschlossen.

Sind diese Bedingungen für jede Funktion $f:M\to N$ äquivalent? Welche Implikationen gelten?