Analysis 1
14. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
9. Februar 2011

Aufgabe 1 Definition von Stetigkeit

Betrachten Sie die Definition für Stetigkeit reeller Funktionen via Folgenkriterium und via ϵ-δ Kriterium. Welche anschauliche Eigenschaft einer Funktion steckt in diesen Definitionen? Beschreiben beide Definitionen anschaulich das gleiche Funktionsverhalten? Diskutieren Sie diese Frage nicht länger als 10 Minuten in Ihrer Kleingruppe.

Aufgabe 2 Stetigkeit der Parabelfunktion

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist, indem Sie das Folgenkriterium für Stetigkeit nachweisen.

(b) Zeigen Sie, dass f stetig ist, indem Sie das ϵ-δ Kriterium für Stetigkeit nachweisen.

Aufgabe 3 Offene abgeschlossene Teilmengen der rationalen Zahlen

Wir betrachten die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$. Zeigen Sie, dass diese Menge sowohl offen als auch abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ ist. Ist M aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}$ offen oder abgeschlossen?

Aufgabe 4 Eine Funktion mit Sprungstelle

Wir betrachten auf $\mathbb{Q}$ die gewohnte durch den Betrag induzierte Metrik und wir betrachten folgende Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{für } x \notin M. \end{cases}$$

Hierbei ist M die Menge aus Aufgabe 3. Zeigen Sie oder widerlegen Sie: Diese Funktion ist stetig auf $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5 Konvergenzkriterien

Zeigen Sie: Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty[$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n < 1$.

(2) Es gibt ein $0 \leq q < 1$, sodass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq q$.

In der Vorlesung haben Sie das Quotienten- und Wurzelkriterium in zwei Formulierungen kennen gelernt. Machen Sie sich klar, dass Sie gerade gezeigt haben, dass beide Formulierungen des Wurzelkriteriums äquivalent sind und beide Formulierungen des Quotientenkriteriums äquivalent sind.

Zusatzaufgabe: Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen

Sei $x \in [0,1]$ eine reelle Zahl. Eine *Dezimalbruchdarstellung von x* ist eine Reihe

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$

mit $a_n \in \{n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n < 10\}$. Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in [0,1]$ eine eindeutige Dezimalbruchdarstellung $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ besitzt mit

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot 10^{-n} \leq \ x \ < \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot 10^{-n} \right) + 10^{-N}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$.