Analysis 1
13. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
2. Februar 2011

Aufgabe 1 Quotientenkriterium vs. Wurzelkriterium

Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen: Kann die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums erkannt werden, so kann sie auch über das Wurzelkriterium festgestellt werden.

Für eine Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen setzen wir hierfür

$$w_n := \sqrt[n]{|a_n|}\,, \qquad\qquad q_n := \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,.$$

a) Sei $(b_n)_n$ eine beschränkte, reelle Folge. Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq n_0$ gilt

$$b_m < \limsup_{n\to\infty} b_n + \varepsilon\,.$$

b) Zeigen Sie nun

$$\liminf_{n\to\infty} q_n \leq \liminf_{n\to\infty} w_n \leq \limsup_{n\to\infty} w_n \leq \limsup_{n\to\infty} q_n$$

Hinweis: Schreiben Sie $|a_m| = |a_n| \cdot q_n \cdot q_{n+1} \dots q_{m-1}$ um die dritte Ungleichung zu beweisen. Die zweite Ungleichung ist trivial (warum?). Die erste Ungleichung lässt sich aus der dritten folgern.

c) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe sowohl mit dem Quotientenkriterium als auch mit dem Wurzelkriterium.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}\,.$$

d) Die Erkenntnisse aus Aufgabenteil b) sind nicht nur für Reihen nützlich. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}\,.$$

Aufgabe 2 Riemannscher Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$. Seien weiter $b_0, b_1, b_2, \ldots$ die positiven Folgenglieder a_n und $c_0, c_1, c_2, \ldots$ die strikt negativen Folgenglieder.

a) Zeigen Sie: Es gilt genau eine der folgenden Aussagen:

   1. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
   2. Die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sind divergent.

In der Vorlesung wurde der Riemannsche Umordnungssatz vorgestellt:

> *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann gibt es für jede Zahl $d \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergiert mit*
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)} = d\ .$$

b) Betrachten Sie die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Konstruieren Sie eine Bijektion $\pi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\pi(n)+1}}{\pi(n)} = 0$$

c) Beweisen Sie den Riemannschen Umordnungssatz.