Analysis 1
12. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
26. Januar 2011

Aufgabe 1 Eine Charakterisierung von Häufungspunkten

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Für eine Folge $(x_n)_n$ in X sind äquivalent:

a) Der Punkt $x \in M$ ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) $(\forall \epsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N},\ m > n) : d(x_m, x) < \epsilon$.

Aufgabe 2 Limes Superior und Limes Inferior

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte Häufungspunkt und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge ist.

Aufgabe 3 Konstruktion von $\mathbb{R}$

Wir wollen in dieser Aufgabe einige Details der Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen ausarbeiten. Welche und wie ausführlich Sie die hier geforderten Beweise führen, bleibt Ihnen überlassen.

Wir betrachten die Menge $\mathscr{C}$ aller Cauchyfolgen $(a_n)_n$ mit Werten in $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie analog zu den Beweisen für konvergente Folgen:

a) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

b) Für zwei Cauchyfolgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ ist auch die Summe $(a_n + b_n)_n$ eine Cauchyfolge.

c) Für zwei Cauchyfolgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ ist auch das Produkt $(a_n \cdot b_n)_n$ eine Cauchyfolge.

d) Sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge, für die **nicht** $\lim_n a_n = 0$ gilt.

   1. Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass entweder $a_n \geq C$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ oder $a_n \leq -C$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
      Insbesondere sind fast alle Folgenglieder von Null verschieden mit $\left|a_n\right| \geq C$.

   2. Die Folge $(1/a_n)_n$ ist eine Cauchyfolge.

Insgesammt haben wir gezeigt, dass die Menge $\mathscr{C}$ einen Ring bildet. Dieser Ring ist kommutativ mit Eins, allerdings kein Körper. (Warum?) Außerdem können wir jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit der konstanten Folgen $(q)_n \in \mathscr{C}$ identifizieren. In diesem Sinne enthält $\mathscr{C}$ den Körper der rationalen Zahlen.

Wir nennen zwei rationale Cauchyfolgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ äquivalent, falls $\lim_n(a_n - b_n) = 0$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall auch $(a_n)_n \sim (b_n)_n$. Zeigen Sie:

e) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelaion.
Wir bezeichnen mit $\mathbb{K} := \mathscr{C}/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$. Für die Äquivalenzklasse eines Elementes $(a_n)_n \in \mathscr{C}$ schreiben wir $[(a_n)_n]$.

f) Die folgenden Operationen sind auf dem Quotienten $\mathbb{K} = \mathscr{C}/\sim$ wohldefiniert:

$$[(a_n)_n] + [(b_n)_n] := [(a_n + b_n)_n] , \qquad [(a_n)_n] \cdot [(b_n)_n] := [(a_n \cdot b_n)] .$$

Wir haben damit gezeigt, dass auch $\mathbb{K}$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet. Auch dieser Ring enthält den Körper der rationalen Zahlen, indem wir $q \in \mathbb{Q}$ mit der Klasse der konstanten Folge $[(q)_n] \in \mathbb{K}$ identifizieren.

Die Konstruktion ist jetzt abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{K}$ tatsächlich eine Menge reeller Zahlen ist.

g) Welche konkreten Aussagen müssen Sie jetzt noch zeigen.

h) Führen Sie den Beweis mit Hilfe Ihrer Aufzeichnungen aus der Vorlesung zu Ende.