Analysis 1
11. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
19. Januar 2011

Aufgabe 1 Die diskrete Metrik

Sei X eine beliebige nicht leere Menge. Wir betrachten die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine Metrik auf X definiert. Charakterisieren Sie alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, die bezüglich dieser Metrik konvergieren.
Diese Metrik heißt übrigens *diskrete Metrik*.

Aufgabe 2 Verschieben von Folgen

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Wir definieren nun durch Verschieben eine neue Folge: Wir fixieren eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$y_n := x_{n+k}.$$

Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Aufgabe 3 Limes Superior und Limes Inferior

Wir betrachten die durch folgende Vorschrift definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n := \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \in \{3\cdot k : k \in \mathbb{N}\} \\ 2 + \frac{n+1}{n} & n \in \{3\cdot k + 1 : k \in \mathbb{N}\} \\ 2 & n \in \{3\cdot k + 2 : k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 4 Grenzwertsätze für Limes Superior und Limes Inferior

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte reelle Folgen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$.

(b) Es gilt $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \ge \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$.

(c) Es gilt $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \ge \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$.

Finden Sie für jede Aussage zwei beschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass in der entsprechenden Ungleichung keine Gleichheit gilt.